Digitale Regelungssysteme: Übungsklausur 5

Bearbeitungszeit: 90 Min

Modalitäten

- Es sind **keine Hilfsmittel** zugelassen.
- Bitte schreiben Sie mit dokumentenechtem Schreibgerät (Tinte oder Kugelschreiber).
- Zur Lösung der Aufgaben ist der freie Platz nach den jeweiligen Aufgaben vorgesehen; bei Bedarf werden Ihnen weitere Lösungsblätter ausgehändigt.
- Für alle Berechnungen sind die **Lösungswege** darzustellen. Die alleinige Angabe eines Ergebnisses wird als Lösung nicht bewertet.

Aufgabe 1

Gegeben sei das zeitdiskrete System

$$x_{k+1} = Ax_k$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

a) Geben Sie die Eigenwerte der Dynamikmatrix sowie deren algebraische und geometrische Vielfachheit an!

b) Ist die Ruhelage $x = 0$ des homogenen Systems stabil? (Begründen Sie Ihre Aussage präzise!)

c) Berechnen Sie den Zustandsvektor x_k zum Abtastschritt $k = 10$!

Aufgabe 2

Gegeben ist das zeitdiskrete System

$$x_{k+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{24} \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{61}{8} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{13}{6} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{41}{12} \end{pmatrix} x_k + b\, u_k \tag{1a}$$

$$y_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x_k \tag{1b}$$

mit $b \in \mathbb{R}^4$.

a) Ist das System vollständig beobachtbar? (Begründen Sie Ihre Antwort!)

b) Skizzieren Sie das Blockschaltbild des Zustandsraummodells (1) mit Luenberger Beobachter!

c) Sei $\hat{k} = \begin{pmatrix} k_0 & k_1 & k_2 & k_3 \end{pmatrix}^T$ die Beobachterverstärkung eines Luenberger Beobachters für das System (1). Geben Sie die Dynamikmatrix der Schätzfehlerdynamik an!

d) Entwerfen Sie die Beobachterverstärkung $\hat{k}$ des Luenberger Beobachters so, dass die Eigenwerte der Schätzfehlerdynamik bei

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \pm j\frac{1}{2}, \quad \lambda_3 = \frac{1}{4}, \quad \lambda_4 = \frac{1}{3}$$

zu liegen kommen.

Aufgabe 3

Gegeben ist das zeitdiskrete SISO System

$$x_{k+1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} x_k + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u_k$$
$$y_k = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} x_k\,.$$

a) Zeigen Sie, dass das System vollständig erreichbar ist!

b) Entwerfen Sie eine Zustandsrückführung $u_k = k^T x_k$, so dass der geschlossene Regelkreis Dead-Beat-Verhalten aufweist!

Im Folgenden sei der Anfangszustand $x_0 = \begin{pmatrix} x_{01} & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$ mit $x_{01} \in \mathbb{R}$ und die Führungsgröße $r_k = 0$ für $k \geq 0$.

c) Berechnen Sie die Werte des Zustands x_k im geschlossenen Regelkreis für $k = 1, 2, 3$!

d) Wie groß darf $x_{01} \in \mathbb{R}$ höchstens sein, damit die Stellgrößenbeschränkung $|u_k| \leq 32$ eingehalten wird?

Aufgabe 4

Gegeben ist das zeitdiskrete SISO System

$$x_{k+1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -8 & -4 & -4 \end{pmatrix} x_k + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u_k$$

$$y_k = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} x_k$$

a) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion des Ein-Ausgangsverhaltens!

b) Berechnen Sie die stationäre Verstärkung des Ein-Ausgangsverhaltens!