Digitale Regelungssysteme: Übungsklausur 6

Bearbeitungszeit: 90 Min

Modalitäten

- Es sind **keine Hilfsmittel** zugelassen.
- Bitte schreiben Sie mit dokumentenechtem Schreibgerät (Tinte oder Kugelschreiber).
- Zur Lösung der Aufgaben ist der freie Platz nach den jeweiligen Aufgaben vorgesehen; bei Bedarf werden Ihnen weitere Lösungsblätter ausgehändigt.
- Für alle Berechnungen sind die **Lösungswege** darzustellen. Die alleinige Angabe eines Ergebnisses wird als Lösung nicht bewertet.

Aufgabe 1

16 Punkte

Ein abgetasteter verfahrenstechnischer Prozess kann mit dem folgenden Satz an Differenzengleichungen beschrieben werden:

$$w_{k+1} = \frac{1}{2}\,w_k + 2\,u_k \qquad v_{k+1} = \alpha\,v_k + u_k \qquad y_{k+1} = \alpha\,y_k - \frac{1}{2}\,u_k$$

$$z_{k+1} = \beta\,z_k + h_k \qquad h_{k+1} = \beta\,h_k + u_k \qquad p_{k+1} = \beta\,p_k - u_k$$

a) Geben Sie das Zustandsraummodell der Form

$$x_{k+1} = Ax_k + bu_k$$

an, wenn für den Zustandsvektor $x_k = \begin{pmatrix} w_k & v_k & y_k & z_k & h_k & p_k \end{pmatrix}^T$ gewählt wird!

b) Bestimmen Sie die Eigenwerte der resultierenden Systemmatrix sowie deren algebraische und geometrische Vielfachheiten!

c) Betrachten Sie den homogenen Teil des Systems. Geben Sie die jeweils größten Intervalle für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ an, für welche die Ruhelage des Systems **stabil** und für welche sie **asymptotisch stabil** ist!

d) Sei $\alpha = -2$ und $\beta = 1$. Bestimmen Sie den Zustand x_k zum Abtastschritt $k = 5$, wenn der Anfangszustand $x_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 10 \end{pmatrix}^T$ und die Eingangsfolge $(u_k) \equiv 0$ ist!

Aufgabe 2

24 Punkte

Gegeben ist das zeitdiskrete System

$$x_{k+1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} x_k + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u_k$$

$$y_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} x_k$$

Für das System soll eine PI-Zustandsrückführung entworfen werden.

a) Zeigen Sie, dass das System vollständig erreichbar ist!

b) Skizzieren Sie das Blockschaltbild der Strecke mit PI-Zustandsrückführung!

c) Geben Sie das um den Integriererzustand x_I **erweiterte** Zustandsraummodell an!

d) Für das **erweiterte** Zustandsraummodell wurde folgende Zustandsrückführung ermittelt:

$$k_E^T = \begin{pmatrix} 3,6 & -5 & -0,5 & 0,02 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie die Parameter des PI-Reglers sowie der Zustandsrückführung k_x^T für die Strecke an, wenn bei verschwindender Anfangsauslenkung und konstanter Führungsgröße für die Stellgröße gelten soll: $u_0 = \lim_{k\to\infty} u_k$.

Aufgabe 3 **18 Punkte**

Gegeben ist das zeitdiskrete System

$$x_{k+1} = Ax_k + bu_k + b_v v_k$$
$$y_k = c^T x_k + du_k$$

mit Stellgröße u_k, Störung v_k und dem Anfangszustand $x_0 = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 15 \end{pmatrix}^T$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad c^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad d = 2\,.$$

Zur Schätzung des Zustands wird ein Luenberger Beobachter verwendet mit Beobachterverstärkung

$$\hat{k} = \begin{pmatrix} \frac{-5}{2} & -3 & 1 \end{pmatrix}^T.$$

a) Geben Sie das Zustandsraummodell des Luenberger Beobachters und die Differenzengleichung des Schätzfehlers $\hat{e} = \hat{x} - x$ an!

b) Ist die Schätzfehlerdynamik stabil? (Begründen Sie Ihre Antwort!)

c) Geben Sie den Schätzfehler des Beobachters für $k = 3$ an, wenn der Beobachter mit $\hat{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$ initialisiert wird und **keine** Störung (v_k) anliegt!

d) Geben Sie den stationären Endwert des Schätzfehlers an, wenn die **konstante** Störung $(v_k) = (v_0, v_0, v_0, \ldots)$ anliegt!

Aufgabe 4 **16 Punkte**

Gegeben ist das zeitkontinuierliche Ein-Ausgangsverhalten mit der Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{4s + 116}{s^2 + 8s + 116}\,.$$

Die Strecke soll in einem Abtastregelkreis mit Halteglied 0-ter Ordnung und konstanter Abtastzeit T_a betrieben werden.

a) Welche maximale Abtastzeit T_a ergibt sich aus der Streifenbedingung?

b) In welchem Intervall wählen Sie die Abtastzeit, wenn Sie die Sprungantwort in Abbildung 1 zugrundelegen? (Begründen Sie Ihre Antwort!)

c) Bestimmen Sie die z-Übertragungsfunktion $G(z)$ für die Strecke im Abtastregelkreis mit Abtastzeit T_a!

   Hinweis: Falls es für Ihre Lösung hilfreich ist, finden Sie in Tabelle 1 Korrespondenzen der z- und Laplace-Transformation einiger abgetasteter Signale.

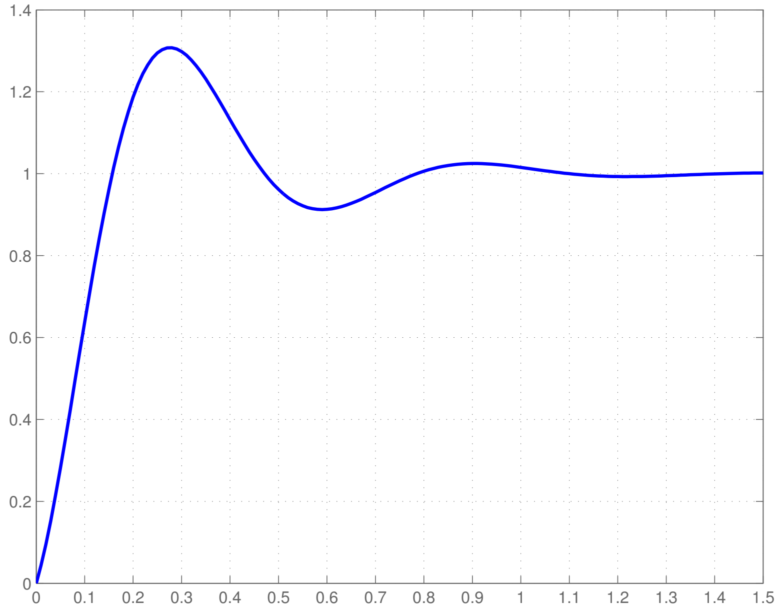

Abbildung 1: Sprungantwort der Strecke $G(s)$

Laplace-Transformierte $F(s)$	zeitkontinuierl. Signal $f(t),\ t \geq 0$	zeitdiskretes Signal $(f_k),\ k \geq 0$	z-Transformierte $f_z(z)$
$\frac{1}{s}$	$\sigma(t)$	$\left(1^k\right)$	$\frac{z}{z-1}$
$\frac{1}{s^2}$	t	$\left(kT_a\right)$	$\frac{T_a z}{(z-1)^2}$
$\frac{1}{s-\alpha}$	$e^{\alpha t}$	$\left(e^{\alpha k T_a}\right)$	$\frac{z}{z-e^{\alpha T_a}}$
$\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$	$\sin(\omega_0 t)$	$\left(\sin(\omega_0 k T_a)\right)$	$\frac{\sin(\omega_0 T_a)\, z}{z^2 - 2\cos(\omega_0 T_a)\, z + 1}$
$\frac{s}{s^2+\omega_0^2}$	$\cos(\omega_0 t)$	$\left(\cos(\omega_0 k T_a)\right)$	$\frac{z^2 - \cos(\omega_0 T_a)\, z}{z^2 - 2\cos(\omega_0 T_a)\, z + 1}$
$\frac{\omega_0}{(s-\alpha)^2+\omega_0^2}$	$e^{\alpha t}\sin(\omega_0 t)$	$\left(e^{\alpha k T_a}\sin(\omega_0 k T_a)\right)$	$\frac{e^{\alpha T_a}\sin(\omega_0 T_a)\, z}{\left(z^2 - 2e^{\alpha T_a}\cos(\omega_0 T_a)\, z + e^{2\alpha T_a}\right)}$
$\frac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2+\omega_0^2}$	$e^{\alpha t}\cos(\omega_0 t)$	$\left(e^{\alpha k T_a}\cos(\omega_0 k T_a)\right)$	$\frac{z^2 - e^{\alpha T_a}\cos(\omega_0 T_a)\, z}{\left(z^2 - 2e^{\alpha T_a}\cos(\omega_0 T_a)\, z + e^{2\alpha T_a}\right)}$

Tabelle 1: Korrespondenztabelle der z- und Laplace-Transformation abgetasteter Signale