Digitale Regelungssysteme: Übungsklausur 7

Bearbeitungszeit: 90 Min

Modalitäten

- Es sind **keine Hilfsmittel** zugelassen.
- Bitte schreiben Sie mit dokumentenechtem Schreibgerät (Tinte oder Kugelschreiber).
- Zur Lösung der Aufgaben ist der freie Platz nach den jeweiligen Aufgaben vorgesehen; bei Bedarf werden Ihnen weitere Lösungsblätter ausgehändigt.
- Für alle Berechnungen sind die **Lösungswege** darzustellen. Die alleinige Angabe eines Ergebnisses wird als Lösung nicht bewertet.

Aufgabe 1 **18 Punkte**

Gegeben ist das *zeitkontinuierliche* System fünfter Ordnung

$$\dot{x}(t) = A_c\, x(t) + b_c\, u(t) \tag{1}$$

mit A_c in Jordannormalform und $b_c = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$.

Die Dynamikmatrix A_c hat den doppelten Eigenwert $\alpha \in \mathbb{R}$ und den dreifachen Eigenwert $\beta \in \mathbb{R}$. Zu beiden Eigenwerten existiert *jeweils genau ein* linear unabhäniger Eigenvektor.

a) Geben Sie die Jordannormalform der zeitkontinuierlichen Dynamikmatrix A_c an!

b) Das System (1) sei in einem Abtastregelkreis mit Halteglied null-ter Ordnung (ZOH) betrieben. Bestimmen Sie A und b der zeitdiskreten Beschreibung der Strecke mit :

$$x_{k+1} = A\, x_k + b\, u_k$$

für beliebige Abtastzeiten T_a.

c) Geben Sie die Eigenwerte der Dynamikmatrix A des zeitdiskreten Systems an! Für welche Werte von $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist die Ruhelage $x_R = 0$ des zeitdiskreten Systems asymptotisch stabil?

Aufgabe 2 **23 Punkte**

Gegeben ist das zeitdiskrete SISO System

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= A\, x_k + b\, u_k \\ y_k &= c^T x_k + d\, u_k \end{aligned}$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -2 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; c^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad d = 2\,.$$

a) Ist das System vollständig erreichbar?

b) Bestimmen Sie für das Stellgesetz $u_k = k^T x_k + g r_k$ den Rückführvektor k^T, so dass der geschlossene Regelkreis Dead-Beat-Verhalten aufweist!

c) Geben Sie die Zustandsraumbeschreibung des geschlossenen Kreises (allgemein) an und bestimmen Sie (allgemein) die stationäre Verstärkung $\frac{y^s}{r^s}$ in Abhängigkeit von g!

Aufgabe 3

19 Punkte

Gegeben ist das zeitdiskrete System

$$x_{k+1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} x_k + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} u_k \tag{2}$$
$$y_k = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} x_k\,.$$

a) Bestimmen Sie die Eingangsfolge (u_k), so dass das System (2) vom Anfangszustand $x_0 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}^T$ in den Ursprung überführt wird!

b) Zeigen Sie, dass das System (2) vom Anfangszustand $x_0 = 0$ *nicht* in 3 Abtastschritten in den Zustand $x_3 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}^T$ überführt werden kann!

c) Geben Sie zu *jeder* der folgenden Aussagen an, ob sie korrekt oder inkorrekt ist! (Begründen Sie Ihre Antworten gegebenfalls mit kurzer Rechnung!)

   i) Der Zustand $x = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}^T$ ist erreichbar.

   ii) Der Zustand $x = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}^T$ ist steuerbar.

   iii) Der Zustand $x = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}^T$ ist beobachtbar.

   iv) Der Zustand $x = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}^T$ ist rekonstruierbar.

Aufgabe 4

24 Punkte

Gegeben ist das Differenzengleichungssystem

$$y_{k+3} - \frac{13}{4} y_{k+2} + \frac{23}{8} y_{k+1} - \frac{3}{4} y_k = u_{k+2} - u_{k+1} - 2u_k\,. \tag{3}$$

a) Bestimmen Sie die z-Übertragungsfunktion $G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)}$!

   Hinweis: Verwenden Sie den Verschiebungssatz: $\mathcal{Z}\{(f_{k+n})\} = z^n \left(f_z(z) - \sum_{j=0}^{n-1} f_j z^{-j} \right)$

   mit der Annahme: $y_0 = y_1 = y_2 = u_0 = u_1 = 0\,.$

b) Geben Sie die Zustandsraumrealisierung von (3) in Regelungsnormalform an!

c) Ist die Realisierung minimal?

   Hinweis: Betrachten Sie die Nullstellen der Übertragungsfunktion!

d) Ist der homogene Teil von (3) asymptotisch stabil? (Begründen Sie Ihre Aussage!)

e) Ist das Ein-Ausgangsverhalten (3) BIBO-stabil? (Begründen Sie Ihre Aussage!)