# Digitale Regelungssysteme: Übungsklausur 9

Bearbeitungszeit: 90 Min

## Modalitäten

- Es sind **keine Hilfsmittel** zugelassen.
- Bitte schreiben Sie mit dokumentenechtem Schreibgerät (Tinte oder Kugelschreiber).
- Zur Lösung der Aufgaben ist der freie Platz nach den jeweiligen Aufgaben vorgesehen; bei Bedarf werden Ihnen weitere Lösungsblätter ausgehändigt.
- Für alle Berechnungen sind die **Lösungswege** darzustellen. Die alleinige Angabe eines Ergebnisses wird als Lösung nicht bewertet.

## Aufgabe 1

Gegeben ist das zeitdiskrete Abtastsystem:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} x_k + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u_k, \qquad x_0 \in \mathbb{R}^2 \\ y_k &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x_k \end{aligned} \tag{1}$$

a) Geben Sie allgemein das zeitdiskrete Regelgesetz für eine zeitdiskrete PI-Zustandsrückführung an und skizzieren Sie das Blockschaltbild der Strecke mit PI-Zustandsrückführung!

b) Geben Sie das mit Integrierzustand erweiterte Zustandsraummodell an und untersuchen Sie dieses auf Erreichbarkeit!

c) Sei $k_e^T = \begin{pmatrix} -\frac{9}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$ die Zustandsrückführung des erweiterten Systems. Berechnen Sie die Parameter $k^T$, $K_p$ und $K_i$ für die PI-Zustandsrückführungs, so dass gilt: $u_0 = \lim_{k\to\infty} u_k$!

## Aufgabe 2

Gegeben ist das Abtastsystem

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + bu_k, \qquad x_0 \in \mathbb{R}^3 \\ y_k &= c^T x_k \end{aligned}$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad c^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass das System vollständig beobachtbar ist!

b) Ist ein trivialer Beobachter (Simulator) zur Zustandsbeobachtung geeignet? (Begründen Sie Ihre Antwort!)

c) Geben Sie die Differenzengleichung eines Luenberger Beobachters an und berechnen Sie die Beobachterverstärkung $\hat{k}$ so, dass die Schätzfehlerdynamik dead-beat Verhalten aufweist!

d) Betrachten Sie die zusätzliche Störung $(v_k) = (v_0, v_0, \dots)$:

$$x_{k+1} = Ax_k + bu_k + b_v v_k \,.$$

mit $b_v \in \mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie den stationären Schätzfehler Ihres Beobachters allgemein in Abhängigkeit von $v_0$!

## Aufgabe 3

Gegeben ist das zeitdiskrete System in Kalmanzerlegung mit $x_1 \in \mathbb{R}^2$ und $x_2 \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_{k+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_k + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u_k$$

$$y_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_k$$

a) Untersuchen Sie die Stabilität des homogenen Systems!

b) Geben Sie die Dimension des erreichbaren Unterraums an!

c) Geben Sie die Dimension des beobachtbaren Unterraums an!

d) Ist das System stabilisierbar? Begründen Sie Ihre Antwort ausführlich!

e) Ist die Realisierung minimal? Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $G(z)$ des Ein-/Ausgangsverhaltens!

*Hinweis:* Nutzen Sie für Ihre Betrachtungen die Blockstruktur der Matrizen, welche durch die Kalmanzerlegung entsteht.

## Aufgabe 4

Gegeben ist der Abtastregelkreis mit Halteglied nullter Ordnung (ZOH) und zeitkontinuierlicher Strecke mit Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 2\,s + 1 + \frac{\pi^2}{4}} \tag{2}$$

a) Geben Sie eine obere Schranke für die Abtastzeit $T_a$ an, die sich nach der Streifenbedingung ergibt!

Sei die Abtastzeit mit $T_a = 1$ sec. gegeben. Für eine quasi-kontinuierliche Betrachtung kann die zeitdiskrete Strecke im Abtastregelkreis einer Tustin-Transformation ($q$-Transformation) unterzogen werden.

b) Bestimmen Sie die Pole der Übertragungsfunktion der $q$-Transformierten $G^{\#}(q)$.