Digitale Regelungssysteme: Übungsklausur 10

Bearbeitungszeit: 90 Min

Modalitäten

- Es sind **keine Hilfsmittel** zugelassen.
- Bitte schreiben Sie mit dokumentenechtem Schreibgerät (Tinte oder Kugelschreiber).
- Zur Lösung der Aufgaben ist der freie Platz nach den jeweiligen Aufgaben vorgesehen; bei Bedarf werden Ihnen weitere Lösungsblätter ausgehändigt.
- Für alle Berechnungen sind die **Lösungswege** darzustellen. Die alleinige Angabe eines Ergebnisses wird als Lösung nicht bewertet.

Aufgabe 1

Gegeben ist das zeitkontinuierliche System

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A_c\, x(t) + b_c\, u(t),\\ y(t) &= c_c^T\, x(t)\end{aligned}$$

mit $b_c = (1 \;\; 0 \;\; \dots \;\; 0)^T$ und $c_c = (1 \;\; 0 \;\; \dots \;\; 0)^T$. Die Dynamikmatrix A_c ist in Jordanform und hat die Eigenwerte λ_1 und λ_2 mit algebraischer Vielfachheit $\mu(\lambda_i)$ und geometrischer Vielfachheit $\nu(\lambda_i)$, $i = \{1, 2\}$, wobei

$$\mu(\lambda_1) = 2, \quad \nu(\lambda_1) = 2, \qquad\qquad \mu(\lambda_2) = 3, \quad \nu(\lambda_2) = 1\,.$$

a) Geben Sie eine Jordannormalform von A_c an!

b) Bestimmen Sie für die zeitdiskrete Beschreibung

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= A\, x_k + b\, u_k,\\ y_k &= c^T\, x_k\end{aligned}$$

die Parameter A, b und c des Abtastsystems mit Halteglied nullter Ordnung und Abtastzeit T_a!

c) Geben Sie die Eigenwerte $\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2$ des zeitdiskreten Systems an! Für welche Werte von $\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2 \in \mathbb{R}$ ist die Ruhelage $x_R = 0$ des zeitdiskreten Systems *stabil*? (Begründen Sie Ihre Antwort ausführlich!)

Digitale Regelungssysteme: Übungsklausur 10

Aufgabe 2

Gegeben ist das zeitdiskrete System in Kalmanzerlegung

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x_k + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} u_k \\ y_k &= c^T x_k \end{aligned}$$

a) Zeigen Sie, dass der erreichbare Unterraum die Dimension 2 hat!

b) Ist die Ruhelage $x_R = 0$ des zeitdiskreten Systems *asymptotisch stabil*?

c) Welche Eigenwerte gehören zum erreichbaren Unterraum? Ist das System vollständig steuerbar? (Begründen Sie Ihre Aussage!)

d) Sei $x_0 = (0 \;\; 0 \;\; 1)^T$ und $u_0 = 0$. Berechnen Sie die ersten Elemente der Eingangsfolge (u_k) so, dass das System vom Anfangszustand x_0 für $k = 3$ in den Zustand $x_3 = (1 \;\; 2 \;\; 0)^T$ überführt wird!

Aufgabe 3

Gegeben ist das Differenzengleichungssystem

$$\begin{aligned} w_{k+1} &= \frac{1}{2} w_k + w_{k-1} - \frac{3}{2} u_k + v_{k-1} \\ y_k &= w_k\,, \end{aligned}$$

wobei $w_k \in \mathbb{R}$ eine Prozeßgröße, $u_k \in \mathbb{R}$ die Stellgröße und $v_k \in \mathbb{R}$ die Störgröße bezeichnet.

a) Geben Sie für das Differenzengleichungssystem ein Zustandsraummodell der Form:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= A\, x_k + b\, u_k + b_v\, v_k, \\ y_k &= c^T x_k \end{aligned}$$

an!
Hinweis: Wählen Sie für die letzte Zustandskomponente $x_n = v_{k-1}$.

b) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktionen $G_u(z) = \frac{Y(z)}{U(z)}$ und $G_v(z) = \frac{Y(z)}{V(z)}$!

c) Ist Ihr Zustandsraummodell eine minimale Realisierung von $G_u(z)$? (Begründen Sie Ihre Aussage!)

d) Geben Sie ein Regelgesetz (allgemein) an, sodass stationäre Störungen $v_k = v_0 \neq 0$ kompensiert werden können! Gehen Sie dabei davon aus, dass der Zustand x_k vollständig bekannt ist!

Aufgabe 4

Gegeben ist die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{s+4}{s+2}$$

eines zeitkontinuierlichen Systems.

a) Bestimmen Sie die z-Übertragungsfunktion $G(z)$ des abgetasteten Systems mit Halteglied nullter Ordnung und Abtastzeit T_a!
Hinweis: Falls es für Ihre Lösung hilfreich ist, finden Sie in Tabelle 1 Korrespondenzen der z- und Laplace-Transformation einiger abgetasteter Signale.

b) Welche Abtastzeit empfehlen Sie für dieses System? (Begründen Sie Ihre Aussage!)

Laplace-Transformierte $F(s)$	zeitkontinuierl. Signal $f(t),\ t \geq 0$	zeitdiskretes Signal $(f_k),\ k \geq 0$	z-Transformierte $f_z(z)$
$\frac{1}{s}$	$\sigma(t)$	$\left(1^k\right)$	$\frac{z}{z-1}$
$\frac{1}{s^2}$	t	$\left(kT_a\right)$	$\frac{T_a z}{(z-1)^2}$
$\frac{1}{s-\alpha}$	$e^{\alpha t}$	$\left(e^{\alpha k T_a}\right)$	$\frac{z}{z-e^{\alpha T_a}}$
$\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$	$\sin(\omega_0 t)$	$\left(\sin(\omega_0 k T_a)\right)$	$\frac{\sin(\omega_0 T_a)\, z}{z^2 - 2\cos(\omega_0 T_a)\, z + 1}$
$\frac{s}{s^2+\omega_0^2}$	$\cos(\omega_0 t)$	$\left(\cos(\omega_0 k T_a)\right)$	$\frac{z^2 - \cos(\omega_0 T_a)\, z}{z^2 - 2\cos(\omega_0 T_a)\, z + 1}$
$\frac{\omega_0}{(s-\alpha)^2+\omega_0^2}$	$e^{\alpha t}\sin(\omega_0 t)$	$\left(e^{\alpha k T_a}\sin(\omega_0 k T_a)\right)$	$\frac{e^{\alpha T_a}\sin(\omega_0 T_a)\, z}{\left(z^2 - 2e^{\alpha T_a}\cos(\omega_0 T_a)\, z + e^{2\alpha T_a}\right)}$
$\frac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2+\omega_0^2}$	$e^{\alpha t}\cos(\omega_0 t)$	$\left(e^{\alpha k T_a}\cos(\omega_0 k T_a)\right)$	$\frac{z^2 - e^{\alpha T_a}\cos(\omega_0 T_a)\, z}{\left(z^2 - 2e^{\alpha T_a}\cos(\omega_0 T_a)\, z + e^{2\alpha T_a}\right)}$

Tabelle 1: Korrespondenztabelle der z- und Laplace-Transformation abgetasteter Signale