Digitale Regelungssysteme: Übungsklausur 11

Bearbeitungszeit: 90 Min

Modalitäten

- Es sind **keine Hilfsmittel** zugelassen.
- Bitte schreiben Sie mit dokumentenechtem Schreibgerät (Tinte oder Kugelschreiber).
- Zur Lösung der Aufgaben ist der freie Platz nach den jeweiligen Aufgaben vorgesehen; bei Bedarf werden Ihnen weitere Lösungsblätter ausgehändigt.
- Für alle Berechnungen sind die **Lösungswege** darzustellen. Die alleinige Angabe eines Ergebnisses wird als Lösung nicht bewertet.

Aufgabe 1

10 Punkte

Der zeitkontinuierliche Prozess

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 2 \\ 0 & \alpha & 3 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u(t), \quad x(0) = x_0 \\ y(t) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} x(t) + 5\,u(t) \end{aligned}$$

wird im Abtastregelkreis mit Halteglied nullter Ordnung betrieben.

a) Zeichnen Sie das Blockschaltbild des Abtastregelkreises mit einem allgemeinen Regler und allgemeiner Strecke und bezeichnen Sie alle Signale!

b) Bestimmen Sie das zeitdiskrete Abtastsystem mit Abtastzeit T_a in Zustandsraumdarstellung und geben Sie System- und Ausgangsgleichung an!

Aufgabe 2 **17 Punkte**

Gegeben ist das zeitdiskrete System in Kalmanzerlegung mit $x_1 \in \mathbb{R}^2$ und $x_2 \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_{k+1} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_k + \begin{pmatrix} b_1 \\ 0 \end{pmatrix} u_k \tag{1}$$

$$y_k = \begin{pmatrix} c_1^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_k \tag{2}$$

mit

$$A_{11} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 4 \\ -\frac{1}{8} & 1 \end{pmatrix}, \quad A_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 5 & -3 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_{22} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass der Unterraum $x_1 \in \mathbb{R}^2$ vollständig erreichbar und vollständig beobachtbar ist!

b) Untersuchen Sie die Stabilität der Ruhelage separat jeweils für den erreichbaren und den nicht erreichbaren Unterraum!

c) Ist das System stabilisierbar? (Begründen Sie Ihre Antwort!)

d) Betrachten Sie die Zustandsrückführung der Form

$$u_k = \begin{pmatrix} k_1^T & k_2^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_k .$$

Geben Sie die Differenzengleichung des geschlossenen Regelkreises an! Verwenden Sie dafür die partitionierte Beschreibung in (1)-(2).

e) Bestimmen Sie den Vektor $k_1 \in \mathbb{R}^2$, so dass die die Eigenwerte des erreichbaren Unterraums im geschlossenen Regelkreis bei $\lambda_{1/2} = \pm i\sqrt{\frac{1}{2}}$ liegen!

f) Bestimmen Sie $k_2 \in \mathbb{R}^3$ so, dass (y_k) für beliebige Anfangswerte x_2 beschränkt ist!

Aufgabe 3 **11 Punkte**

Gegeben ist das vollständig beobachtbare zeitdiskrete SISO-System

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= A\,x_k + b\,u_k + b_v\,v_k, \quad x_0 \in \mathbb{R}^n \\ y_k &= c^T x_k \end{aligned} \tag{3}$$

mit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b, b_v, c \in \mathbb{R}^n$ und Eingangsstörung $v_k \in \mathbb{R}$, Eingang $u_k \in \mathbb{R}$ und Ausgang $y_k \in \mathbb{R}$.

a) Geben Sie die Differenzengleichung eines Luenberger-Beobachters für das System (3) an!

b) Bestimmen Sie die Dynamik des Schätzfehlers $e_k = \hat{x}_k - x_k$ in allgemeiner Form!

c) Geben Sie den stationären Schätzfehler e_∞ für eine konstante Störung $v_k = v^s \neq 0$ an! Kann die Beobachterverstärkung $\hat{k}$ so entworfen werden, dass unter dem Einfluss konstanter Störung $v_k = v^s \neq 0$ der Schätzfehler für $k \to \infty$ zu Null konvergiert?

Betrachten Sie eine Störgrößenaufschaltung mittels des Störmodells:

$$v_{k+1} = v_k, \quad v_0 = v^s \in \mathbb{R}\,. \tag{4}$$

d) Geben Sie die Zustandsraumdarstellung des um das Störmodell erweiterten Modells an!

e) Betrachten Sie einen Luenberger Beobachter für das erweiterte Modell und geben Sie die Schätzfehlerdynamik an!

f) Geben Sie eine Bedingung für c^T und b_v an, so dass für das erweiterte Modell eine Beobachterverstärkung gefunden werden kann, die dafür sorgt, dass der Schätzfehler bei beliebigen x_0, v_0 für $k \to \infty$ zu Null konvergiert! (Begründen Sie Ihre Antwort!)

Aufgabe 4 **10 Punkte**

Gegeben ist das Zustandsraummodell

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix} x_k + \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} u_k \\ y_k &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x_k \end{aligned}$$

a) Ist das Zustandsraummodell eine minimale Realisierung? (Begründen Sie Ihre Antwort!)

b) Zeigen Sie, dass $\lambda = -2$ Eigenwert der Dynamikmatrix ist!

c) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion des Ein-Ausgangsverhaltens! Kürzen Sie dabei alle sich kompensierenden Terme!