Digitale Regelungssysteme: Übungsklausur 12

Bearbeitungszeit: 90 Min

Modalitäten

- Es sind **keine Hilfsmittel** zugelassen.
- Bitte schreiben Sie mit dokumentenechtem Schreibgerät (Tinte oder Kugelschreiber).
- Zur Lösung der Aufgaben ist der freie Platz nach den jeweiligen Aufgaben vorgesehen; bei Bedarf werden Ihnen weitere Lösungsblätter ausgehändigt.
- Für alle Berechnungen sind die **Lösungswege** darzustellen. Die alleinige Angabe eines Ergebnisses wird als Lösung nicht bewertet.

Aufgabe 1

5 Punkte

Gegeben ist das homogene zeitdiskrete System

$$x_{k+1} = Ax_k$$

mit $x_k \in \mathbb{R}^5$ und $A \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ in Jordannormalform mit den Eigenwerten $\lambda_1 = 5$ und $\lambda_2 = 10$. Die algebraischen Vielfachheiten sind $\mu(\lambda_1) = 2$ und $\mu(\lambda_2) = 3$, die geometrische Vielfachheit beträgt jeweils 1.

a) Geben Sie eine Jordannormalform von A an!

b) Geben Sie die homogene Lösung für den allgemeinen Anfangszustand $x_0 \in \mathbb{R}^5$ an und bestimmen Sie den Zustand x_k für den Zeitschritt $k = 5$, wenn $x_0 = (1\ 1\ 0\ 0\ 0)^T$ ist!

Hinweis: Die Potenzen müssen nicht ausgewertet werden.

Aufgabe 2 **14 Punkte**

Gegeben ist der zeitdiskrete Prozess

$$x_{k+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{pmatrix} x_k + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u_k \tag{1}$$

$$y_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x_k. \tag{2}$$

Dieser soll mit einer *PI-Ausgangsrückführung*:

$$x_{I,k+1} = x_{I,k} + e_k$$
$$u_k = K_p\, e_k + K_I\, x_{I,k}$$

mit dem Integriererzustand $x_{I,k}$ und Regelfehler $e_k = r_k - y_k$ im Standardregelkreis betrieben werden.

a) Ist die Zustandsraumdarstellung des Prozesses (1)-(2) vollständig erreichbar?

b) Bestimmen Sie das Zustandsraummodell des geschlossenen Regelkreises mit dem PI-Regler!

c) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom des geschlossenen Regelkreises. Können die Eigenwerte des geschlossenen Kreises beliebig platziert werden? (Begründen Sie Ihre Antwort!)

Mit $a_0 = \frac{5}{12}, a_1 = \frac{7}{3}, K_p = \frac{5}{2}, K_I = 3$ ergibt sich das charakteristische Polynom des geschlossenen Regelkreises zu:

$$p(\lambda) = \left(\lambda + \frac{1}{2}\right)\left(\lambda^2 + \frac{5}{6}\lambda + \frac{1}{6}\right).$$

d) Ist die Ruhelage $x_R = 0$ des geschlossenen Regelkreises asymptotisch stabil?

e) Zeigen Sie, dass der stationäre Regelfehler für konstante Führungsgrößen $r_k = r_0, \forall k \geq 0$ null ist! *Hinweis: Bei geschickter Begründung wird hierfür lediglich eine einfache Rechnung benötigt.*

Aufgabe 3 **15 Punkte**

Gegeben ist das zeitdiskrete System

$$x_{k+1} = Ax_k + bu_k \tag{3}$$

$$y_k = c^T x_k \tag{4}$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Ist die Ruhelage $x_R = 0$ asymptotisch stabil? (Begründen Sie Ihre Aussage!)

b) Ist die Zustandsraumdarstellung (3)-(4) eine Minimalrealisierung? (Begründen Sie Ihre Aussage!)

c) Welche Dimension hat der erreichbare Unterraum von (3)-(4)?

d) Bestimmen Sie die z-Übertragungsfunktion $G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)}$! Kürzen Sie soweit wie möglich!

e) Ist die Realisierung (3)-(4) stabilisierbar? (Begründen Sie Ihre Aussage!)

f) Ist die Realisierung (3)-(4) detektierbar? (Begründen Sie Ihre Aussage!)

Aufgabe 4

14 Punkte

Gegeben ist das zeitkontinuierliche Signal

$$d(t) = 1 + \sin(\omega_0 t)\,.$$

Betrachten Sie eine Abtastung des Signals mit der Abtastzeit T_a!

a) Wie groß darf die Abtastzeit T_a nach dem Abtasttheorem maximal gewählt werden?

b) Bestimmen Sie die z-Transformierte $D(z)$ des mit T_a abgetasteten Signals! Nutzen Sie hierfür die unten stehende Korrespondenztabelle!

c) Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $G(z) = \frac{D(z)}{U(z)}$, die das Signal $D(z)$ als Sprungantwort besitzt!

d) Ist $G(z)$ BIBO-stabil? *(Hinweis, es gilt:* $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$*)*

e) Wie muß T_a gewählt werden, damit die Pole von $G(z)$ im ersten und vierten Quadraten liegen?

f) Bestimmen Sie die Pole der q-Transformierten Übertragungsfunktion $G^{\#}(q)$.

Zeitbereich (f_k)	Bildbereich $f_z(z)$
$\left(1^k\right)$	$\dfrac{z}{z-1}$
$\left(e^{\alpha\, kT_a}\right)$	$\dfrac{z}{z-e^{\alpha T_a}}$
$\left(\sin(\omega_0\, kT_a)\right)$	$\dfrac{\sin(\omega_0 T_a)\, z}{z^2 - 2\cos(\omega_0 T_a)\, z + 1}$
$\left(\cos(\omega_0\, kT_a)\right)$	$\dfrac{z^2 - \cos(\omega_0 T_a)\, z}{z^2 - 2\cos(\omega_0 T_a)\, z + 1}$