Beiblatt 10: Adaptive Folgeregelung eines Pendels unter Unsicherheiten

Die Systembeschreibung eines Pendels (Euler-Lagrange-Gleichung) habe die Form

$$MR^2\ddot{q}(t) + d\,\dot{q}(t) + MgR\,\sin q(t) + \mu\,\mathrm{sign}(\dot{q}(t)) = u(t)\,.$$

Dabei sei M die Pendelmasse, R die Pendellänge, g die Erdbeschleunigung und μ der Reibbeiwert einer konstanten, entgegen der Bewegung gerichteten Reibung. Diese konstanten, positiven Parameter seien alle als unbekannt anzusehen. Die Größe u bezeichne das aufgebrachte Moment (Stellgröße).

Ziel ist der Entwurf einer Folgeregelung zum asymptotisch stabilen Aufschwingen des Pendels von der stabilen Ruhelage

$$q(0) = q_0 = 0, \quad \dot{q}(0) = \dot{q}_0 = 0$$

zur aufrechten, instabilen Position

$$q(1) = q_1 = \pi, \quad \dot{q}(1) = \dot{q}_1 = 0$$

in einer Zeiteinheit.

Für den Entwurf der Regelung verwenden wir eine 2fach stetig differenzierbare Solltrajektorie $q^\star$ mit Randbedingungen

$$q^\star(0) = q_0 = 0, \quad q^\star(1) = q_1 = \pi, \quad \text{und} \quad \dot{q}^\star(0) = \ddot{q}^\star(0) = \dot{q}^\star(1) = \ddot{q}^\star(1) = 0\,.$$

Das Polynom niedrigsten Grades, das diese Bedingungen erfüllt, ist das Transitionspolynom

$$q^\star(t) = q_0 + (q_1 - q_0)\sum_{j=n+1}^{2n+1} \frac{(2n+1)!\,(-1)^{j-n-1}}{j\,n!\,(j-n-1)!\,(2n+1-j)!}\,t^j$$

mit $n = 2$. In diesem Fall erhalten wir

$$q^\star(t) = \begin{cases} q_0 + (q_1 - q_0)(10\,t^3 - 15\,t^4 + 6\,t^5) & ,\ 0 \le t \le 1 \\ q_1 & ,\ t > 1 \end{cases}$$

Beim Entwurf der Folgeregelung soll die konstante Reibung unberücksichtigt bleiben, um die Robustheit der Regelung zu überprüfen.

Dem Enturf wird folgendes Modell mit unsicheren Parametern p_1, p_2 und p_3 zugrunde gelegt:

$$p_1\,\ddot{q}(t) + p_2\,\dot{q}(t) + p_3\,\sin q(t) = u(t)\,.$$

Streckenparameter für die Simulation: $M = 1$, $R = 0{,}5$, $d = 1$, $g = 10$ und $\mu = 0{,}2$.

Damit ergeben sich die Parameter zu: $p_1 = 0{,}25$, $p_2 = 1$ und $p_3 = 5$.

Für den adaptiven Folgeregler aus der Vorlesung benötigen wir

- die Hilfsgrößen $\dot{q}_\mathrm{r} = \dot{q}^\star - \Lambda(q - q^\star)$ und $\ddot{q}_\mathrm{r} = \ddot{q}^\star - \Lambda(\dot{q} - \dot{q}^\star)$ und
- $P^\mathrm{T} = P > 0$, $\Lambda^\mathrm{T} = \Lambda > 0$ und $K^\mathrm{T} = K > 0$, der Einfachheit halber diagonal.

Für den Regler erhält man damit

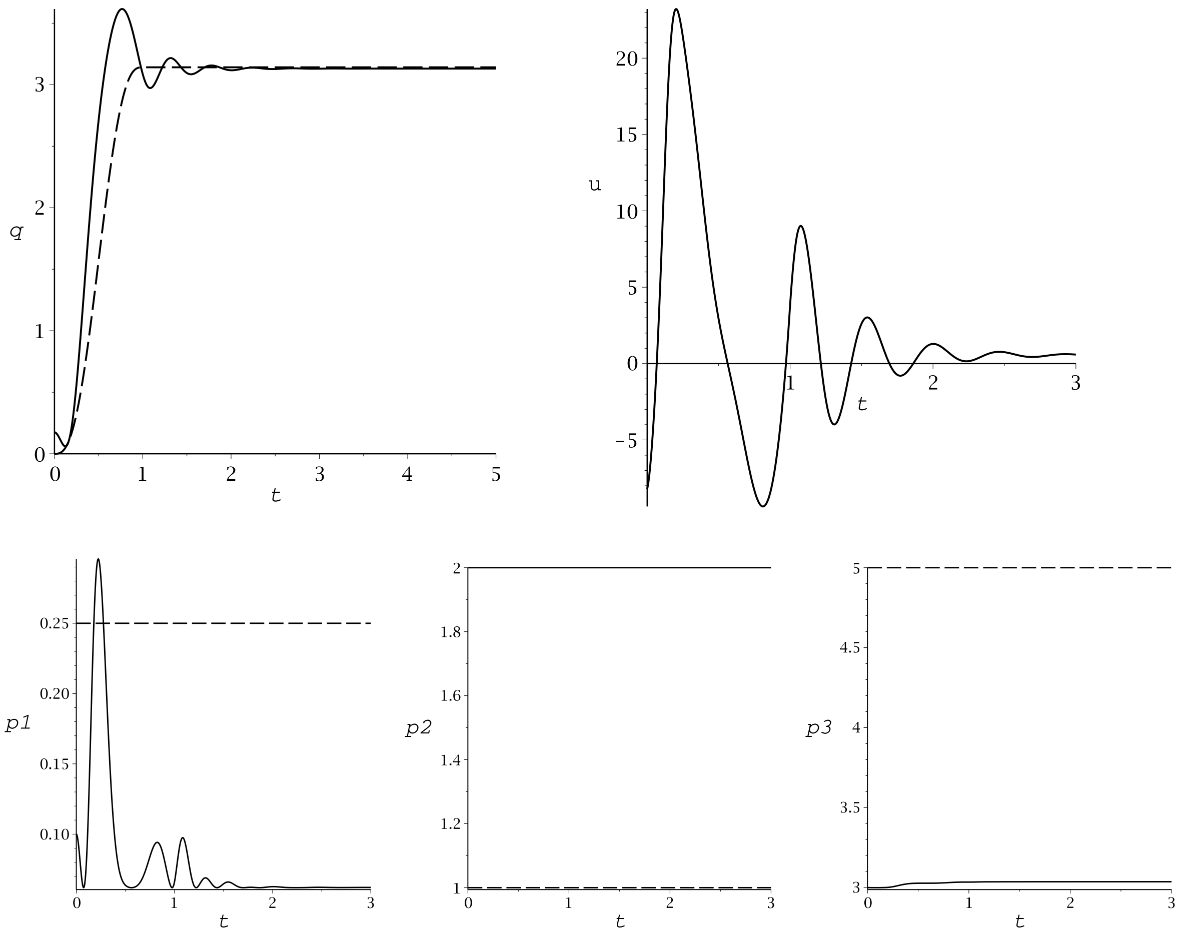
$$\dot{\hat{p}} = -P \begin{pmatrix} \ddot{q}_\mathrm{r} \\ \dot{q} \\ \sin q \end{pmatrix} (\dot{q} - \dot{q}_\mathrm{r})$$

$$u = (\ddot{q}_\mathrm{r}, \dot{q}, \sin q)\hat{p} - K\,(\dot{q} - \dot{q}_\mathrm{r})$$

Reglerparameter für die Simulation: $P = 0,1\,\mathrm{I}$, $K = 10\ \mathrm{I}$, $\Lambda = 5\ \mathrm{I}$, $\hat{p}_1 = 0,1$, $\hat{p}_2 = 2$ und $\hat{p}_2 = 3$.

Anfangswerte der Regelstrecke: $q(0) = 0$ und $\dot{q}(0) = 0$.

Das Ergebnis der Simulation ist in den folgenden Auftragungen dargestellt:



Die Performance der Folgeregelung ist trotz der beim Entwurf nicht berücksichtigten konstanten Reibung brauchbar. Dabei bleibt die Stellgröße u im für die gewählten Streckenparameter üblichen Bereich. Die Werte von $\hat{p}_1$, $\hat{p}_2$ und $\hat{p}_3$ unterscheiden sich zum Teil beträchtlich von den wahren Parameterwerten $p_1 = 0,25$, $p_2 = 1$ und $p_3 = 5$.