Beiblatt 8: Die Methode von Zubov zur Bestimmung des Einzugsbereichs[1]

Wir betrachten ein System n-ter Ordnung

$$\dot{x} = f(x)$$

mit glattem Vektorfeld f und $f(0) = 0$. Wir untersuchen den Einzugsbereich der Ruhelage $x_\mathrm{R} = 0$. Da das Vektorfeld f glatt ist, kann es an der Ruhelage in eine Taylor-Reihe entwickelt werden, d.h.

$$\dot{x} = A\,x + g(x) \qquad \text{wobei} \quad A = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=0}, \quad g(x) = g_2(x) + g_3(x) + \cdots$$

mit den Vektoren

$$g_i(x) = \sum_{\Sigma k_j = i} c_{k_1 \ldots k_n}\, x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n}\,.$$

Dabei resultieren die Vektoren $c_{k_1\ldots k_n} \in \mathbb{R}^n$ aus der Taylorentwicklung, sie sind also bekannt.

Wir suchen nun eine Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial V}{\partial x}(A\,x + g(x)) = -\psi(x)(1 - V(x))$$

bzgl. $V(0) = 0$. Dabei ist $\psi = \psi(x)$ eine frei wählbare, positiv definite Funktion.

Für V setzen wir an

$$V(x) = V_2(x) + V_3(x) + \cdots \quad \text{mit} \quad V_i(x) = \sum_{\Sigma k_j = i} v_{k_1 \ldots k_n}\, x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n}\,.$$

Damit erhalten wir

$$\left(\sum_{i=2}^{\infty} \frac{\partial V_i}{\partial x}\right)\left(A\,x + \sum_{i=2}^{\infty} g_i(x)\right) = -\psi(x)\left(1 - \sum_{i=2}^{\infty} V_i(x)\right)$$

Wählen wir ψ quadratisch als $\psi(x) = x^\mathrm{T} P\,x$ mit $P^\mathrm{T} = P > 0$, so führt dies auf das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V_2}{\partial x} A\,x &= -\psi(x) && (1)\\
\frac{\partial V_3}{\partial x} A\,x &= -\frac{\partial V_2}{\partial x} g_2(x) && (2)\\
\frac{\partial V_4}{\partial x} A\,x &= \psi(x) V_2(x) - \frac{\partial V_2}{\partial x} g_3(x) - \frac{\partial V_3}{\partial x} g_2(x) && (3)\\
&\;\;\vdots\\
\frac{\partial V_m}{\partial x} A\,x &= \psi(x) V_{m-2}(x) - \sum_{i=2}^{m-1} \frac{\partial V_i}{\partial x} g_{m+1-i}(x)
\end{aligned}$$

Nun kann beginnend mit (1) via Koeffizientenvergleich $V_2(x)$ bestimmt werden. Einsetzen von $V_2(x)$ in (2) liefert dann $V_3(x)$ und so weiter. Man erhält auf diesem Weg eine Näherung

$$V(x) \approx V_2(x) + \cdots + V_m(x)\,.$$

Der Einzugsbereich $\mathcal{E}$ der Ruhelage $x_\mathrm{R} = 0$ ist dann näherungsweise

$$\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, 0 \leq V(x) \leq 1\}.$$

Bemerkung: So ermittelte Einzugsbereiche verbessern sich nicht notwenderweise gleichmäßig mit der Approximationsstufe. U.U. sind viele Iterationen oder auch Variationen der Matrix P nötig.

[1] Thomas Vincent, Walter Grantham, *Nonlinear and Optimal Control Systems*, John Wiley & Sons, 1997