Klausur: Nichtlineare Regelungssysteme 1

Winter 2018/2019

Seminarraum HU 211/212
Freitag, den 22. 03. 2019
Beginn: 12.30 Uhr
Bearbeitungszeit: 120 Min

Modalitäten

- Als Hilfsmittel sind **nur** handschriftliche Aufzeichnungen, Kopien der Vorlesungs- und Übungsunterlagen sowie Übungsklausuren zugelassen.
- Bitte schreiben Sie mit dokumentenechtem Schreibgerät (Tinte oder Kugelschreiber).
- Zur Lösung der Aufgaben ist der freie Platz nach den jeweiligen Aufgaben vorgesehen; bei Bedarf werden Ihnen Zusatzblätter ausgehändigt.
- Für alle Berechnungen sind die **Lösungswege** darzustellen. Die alleinige Angabe eines Ergebnisses wird als Lösung nicht bewertet.

Name: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Studiengang: ____________________

Abgabe: ________

Zusatzblätter: ____

Aufgabe	1	2	3	4		Σ
max. Punkte	25	9	18			52
erreichte Punkte						
					Note	

Aufgabe 1

25 Punkte

Betrachten Sie die folgenden Systeme 2. Ordnung und die Phasenportraits in Abbildung 1.

$$\Sigma_1 : \begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -2x_2 \end{cases} \qquad \Sigma_2 : \begin{cases} \dot{x}_1 &= x_1^2 - 4x_1 - x_2 \\ \dot{x}_2 &= 0 \end{cases}$$

$$\Sigma_3 : \begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\sin(x_1) - \frac{2}{5}x_2 \end{cases} \qquad \Sigma_4 : \begin{cases} \dot{x}_1 &= x_1^2 - 2x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - x_2 + 2 \end{cases}$$

a) Geben Sie alle Ruhelagen der Systeme an.

b) Ordnen Sie die Phasenprotraits den jeweiligen Systemgleichungen zu.

c) Kennzeichnen Sie den Verlauf der Zeit in den Phasenportraits.

d) Beurteilen Sie die Stabilität der einzelnen Ruhelagen.

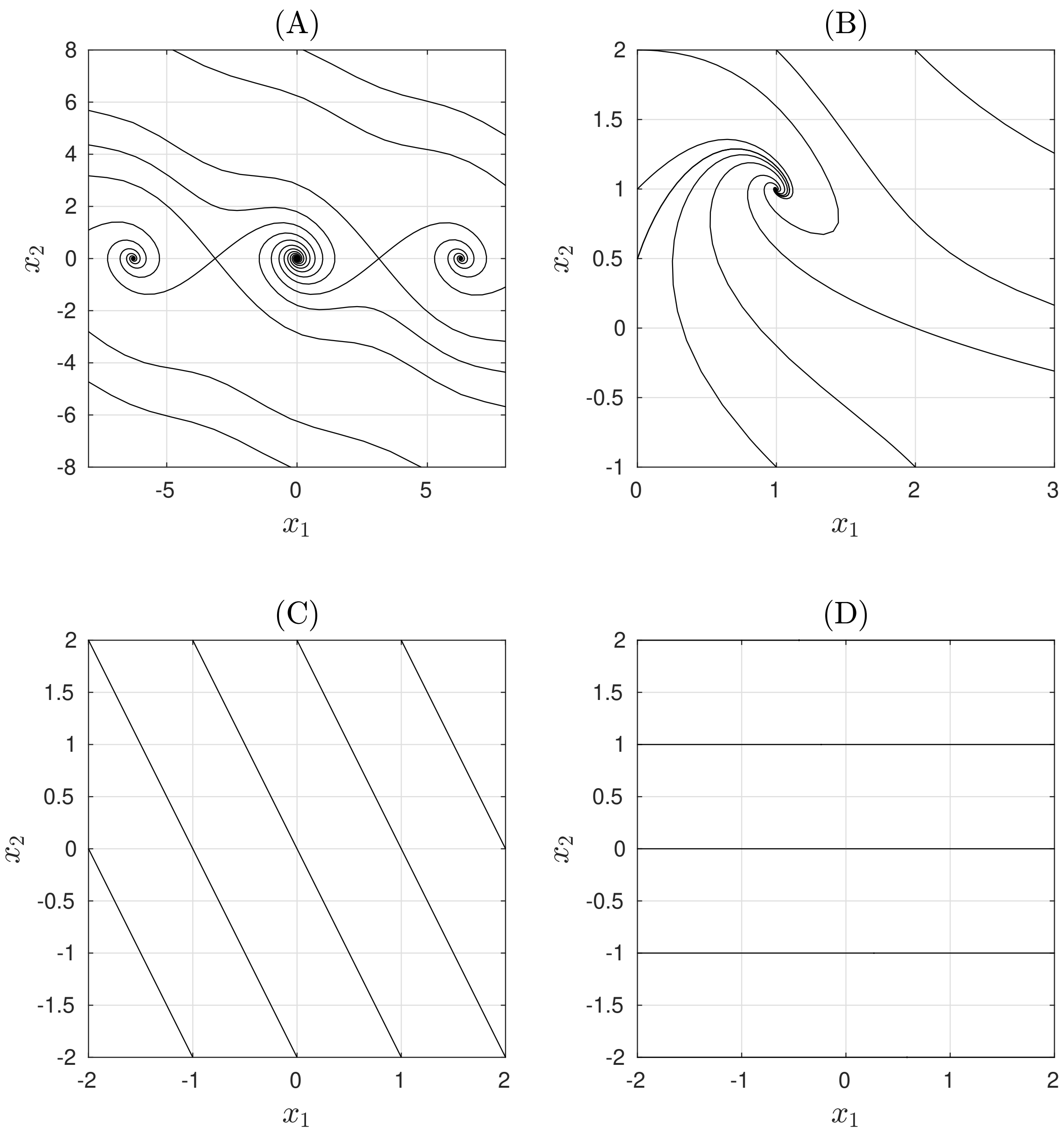

Abbildung 1: Phasenportraits

Aufgabe 2

9 Punkte

Gegeben sei das System

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -\operatorname{sign}(x_1)\,x_1^2 + x_2\cos(x_1)\\ \dot{x}_2 &= -\sin(x_1)\,\mathrm{e}^{x_2} + u\\ \dot{x}_3 &= -x_3^3 + 2b\,x_2 x_3\end{aligned}$$

mit konstantem Koeffizienten $b > 0$ sowie die Funktion

$$V = \frac{1}{2}\,x^\top x.$$

a) Ist V als Kandidat für eine Lyapunov-Funktion für globale Aussagen geeignet?

b) Bestimmen Sie (unter Verwendung von V) eine Zustandsrückführung $u = \bar{u}(x)$, so dass die Ruhelage $x_\mathrm{R} = 0$ des geschlossenen Regelkreises global asymptotisch stabil ist.

Der Ausgang des Systems sei

$$\begin{aligned}y_1 &= x_1 + 2\,x_2^2,\\ y_2 &= x_2.\end{aligned}$$

c) Bestimmen Sie (unter Verwendung von V) eine Ausgangsrückführung $u = \tilde{u}(y)$, so dass die Ruhelage $x_\mathrm{R} = 0$ des geschlossenen Regelkreises global asymptotisch stabil ist.

Hinweis: Verwenden Sie eine quadratische Ergänzung.

Aufgabe 3

18 Punkte

Gegeben sei das System:

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) - \frac{1}{2}\left(\frac{x_1(t)^3}{3} - x_1(t)\right) \\ \dot{x}_2(t) = -x_1(t) \end{cases}$$

Auf der umliegenden Seite 12 sind in Abbildung 2 im zugehörigen Phasenportrait die folgenden Testmengen dargestellt:

$$\mathcal{M}_1 = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \,|\, g(x) = x_1^2 + x_2^2 - 1 < 0\right\}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_2 = \Big\{x \in \mathbb{R}^2 \,|\, & h_1(x) = x_2 - 3 < 0,\, h_2(x) = -x_2 - 3 < 0, \\ & h_3(x) = x_1 - 3 < 0,\, h_4(x) = -x_1 - 3 < 0, \\ & h_5(x) = -\frac{1}{3}\operatorname{sign}(x_1)x_1^2 + x_2 - 3 < 0, \\ & h_6(x) = \frac{1}{3}\operatorname{sign}(x_1)x_1^2 - x_2 - 3 < 0\Big\}\end{aligned}$$

a) Bestimmen Sie die Ruhelagen des Systems Σ und charakterisieren Sie deren Stabilität.

b) Betrachten Sie nun Abbildung 2:

  (i) Zeichnen Sie die Ruhelagen aus a) ein.

  (ii) Geben Sie den Drehsinn der dargestellten Lösungstrajektorien an.

  (iii) Wo liegen $\mathcal{M}_1$ und $\mathcal{M}_2$?

  (iv) Schraffieren Sie den Bereich $\mathcal{N} := \mathcal{M}_2 \setminus \mathcal{M}_1$ ("$\mathcal{M}_2$ ohne $\mathcal{M}_1$").

  (v) Markieren Sie die Randbereiche von $\mathcal{M}_2$, für die $h_i(x) = 0 \,\forall i = 1, \ldots, 6$ gilt (für h_1 bereits beispielhaft bereits angegeben).

c) Zeigen Sie, dass $\mathcal{M}_1$ negativ invariant ist.

d) Zeigen Sie, dass $\mathcal{M}_2$ positiv invariant ist. Nutzen Sie dazu die Symmetrieeigenschaften des Systems und beschränken Sie die Rechnungen auf den 1. und 4. Quadranten, d.h. $x_2 \geq 0$.

e) Weisen Sie nach, dass sich ein Grenzzyklus in $\mathcal{N}$ befindet.

f) Das System Σ wird in folgender Weise modifiziert:

$$\tilde{\Sigma} : \begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) - \frac{1}{2}\left(\frac{x_1(t)^3}{3} - x_1(t) + \frac{x_1(t)}{3}x_2(t)^2\right), \\ \dot{x}_2(t) = -x_1(t)\,. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass $x_2(t) = A\sin(t)$ mit $A > 0$ eine Lösung von $\tilde{\Sigma}$ ist. Wie groß ist die Amplitude A der resultierenden Schwingung?

Hinweis: Betrachten Sie die Ränder der Mengen für die jeweilige Invarianzargumentation. Nutzen Sie bei $\mathcal{M}_2$ die Darstellung der Ränder als Geradengleichungen beachten Sie entsprechend Tabelle 1.

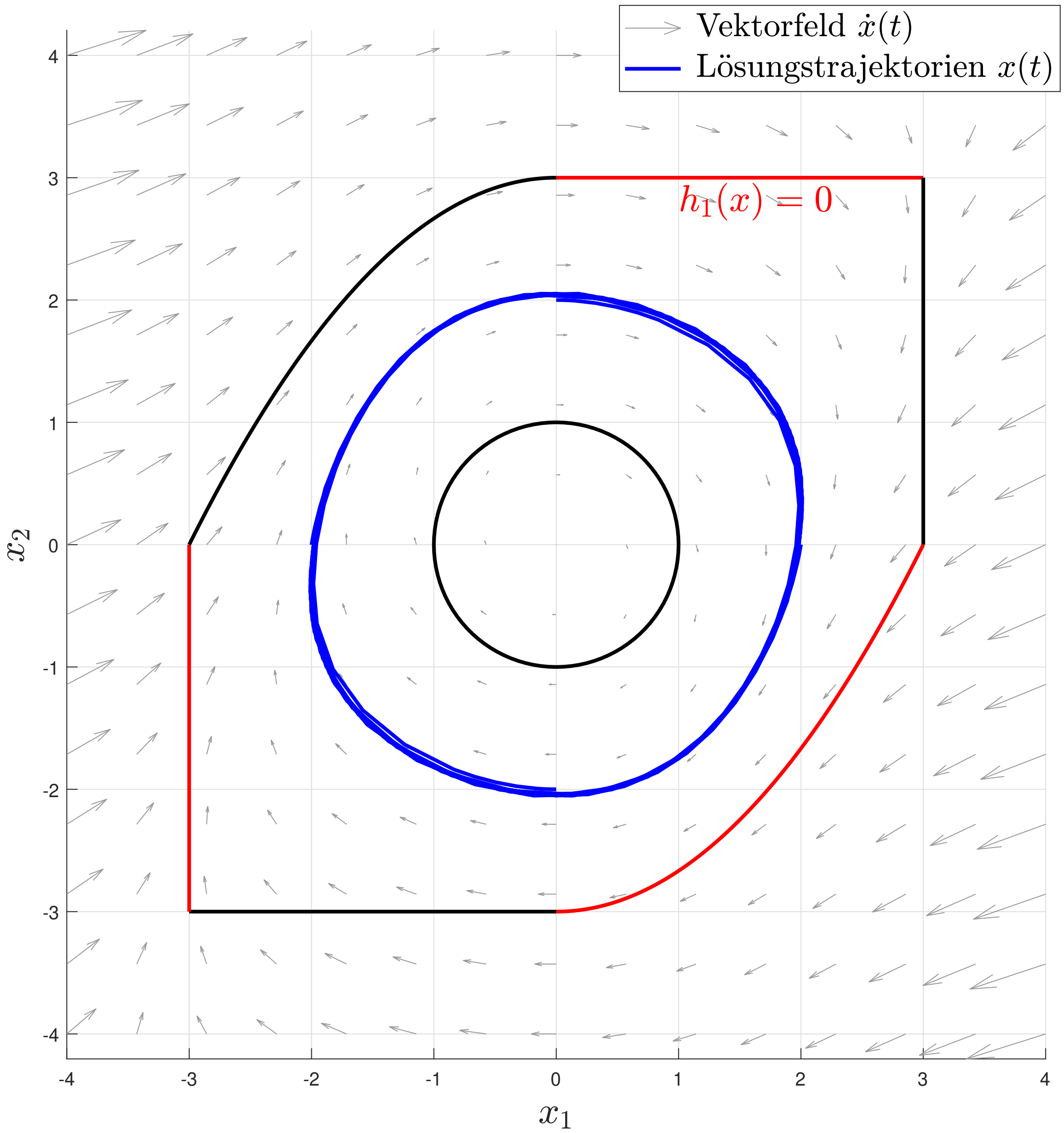

Abbildung 2: Phasenportrait des Systems Σ mit Beispiellösungen und Rändern von $\mathcal{M}_1$ bzw. $\mathcal{M}_2$

$z > 0$	$a \in$	$b \in$	$c \in$	$d \in$
$az^4 + bz^3 + cz^2 + dz > 0$	$[\frac{1}{10}, \frac{1}{5}]$	$[-\frac{1}{9}, -\frac{2}{9}]$	$[-\frac{1}{5}, -\frac{1}{3}]$	$[1, 2]$

Tabelle 1: Abschätzung für ausgewähltes Polynom mit entsprechenden Parameterbereichen