Nichtlineare Regelungssysteme 1 — Übung 1

Sommer 2015

Aufgabe 1

Veranschaulichen Sie sich die folgenden Unterschiede von nichtlinearen und linearen Systemen:

a) Nichtlineare Systeme haben entweder keine oder auch mehrere Ruhelagen. Im Unterschied zu linearen Systemen mit mehr als einer Ruhelage kann die Anzahl der Ruhelagen bei nichtlinearen Systemen endlich sein. Geben Sie ein Beispiel an für ein System mit genau 2 Ruhelagen.

b) Anders als bei linearen Systemen können nichtlineare Systeme in endlicher Zeit in eine Ruhelage einlaufen. Untersuchen Sie dazu die Lösung von $\dot{x} = -\operatorname{sign}(x)\sqrt{|x|}$, $x(0) = x_0$.

c) Die Lösung eines nichtlinearen Systems kann auch in endlicher Zeit über alle Grenzen wachsen (man spricht von *endlicher Entweichzeit*), wohingegen bei linearen Systemen dies erst im Grenzfall $t \to \infty$ möglich ist. Geben Sie ein Beispiel an für ein System erster Ordnung mit endlicher Entweichzeit.

d) Maßgeblich für lineare Systeme ist die Gültigkeit des Superpositionsprinzips. Zeigen Sie mit Hilfe eines geeigneten Systems, daß im nichtlinearen Fall das Superpositionsprinzip nicht gilt.

Aufgabe 2

Bei der Stabilitätsuntersuchung nichtlinearer Systeme spielen quadratische Formen eine besonders wichtige Rolle.

a) Zeigen Sie, daß sich jede quadratische Matrix A in einen symmetrischen Anteil A_S und einen schiefsymmetrischen Anteil $A_{\bar{\mathrm{S}}}$ zerlegen läßt.

b) Verwenden Sie diese Zerlegung, um schlußzufolgern, daß sich schiefsymmetrische Anteile in quadratischen Formen $x^\mathrm{T} A\, x$ herausheben.

c) Jede symmetrische Matrix A_S läßt sich mittels einer orthogonalen Matrix V gemäß $A_\mathrm{S} = V\, \Lambda\, V^\mathrm{T}$ auf eine Diagonalmatrix $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ transformieren. Dabei sind die Zahlen $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$, die nicht notwendigerweise verschiedenen Eigenwerte von A_S. Zeigen Sie damit, daß für jede quadratische Matrix A die Beziehung

$$\lambda_{\min}(A_S)\, \|x\|_2^2 \;\leq\; x^\mathrm{T} A\, x \;\leq\; \lambda_{\max}(A_S)\, \|x\|_2^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

gilt.

Aufgabe 3

Das Iterationsverfahren

$$x^0 \equiv x(t_0) = x_0, \quad x^{i+1} := T(x^i)$$

mit

$$T(x^i)(t) := x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x^i(\tau), \tau)\, d\tau$$

zur Lösung einer Differentialgleichung des Typs $\dot{x} = f(x,t)$ wird Iterationsverfahren von Picard genannt. Berechnen Sie damit die allgemeine Lösung von

$$\dot{x} = A\,x, \quad x(t_0) = x_0$$

mit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Aufgabe 4

Gegeben ist die (x_1, x_2)-Ebene. Zeichnen Sie in diese Ebene die Mengen $\mathcal{M}_p = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_p \leq 1\}$ für $p \in \{1, 2, \infty\}$ ein. Finden Sie anhand des Bildes geeignete Konstanten $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$ für die Ungleichungen

$$c_1\,\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq c_2\,\|x\|_2 \qquad \text{und} \qquad c_3\,\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq c_4\,\|x\|_\infty$$

und erweitern Sie die Ergebnisse auf den n-dimensionalen Vektorraum.

Aufgabe 5

Zeigen Sie, daß die induzierte Matrixnorm $\|A\|_{i,p}$ zur Vektornorm $\|x\|_p$ verträglich ist — nur Fälle $p \in \{1, 2, \infty\}$. Zeigen Sie darüber hinaus, daß die nicht induzierte Frobeniusnorm mit der 2-Norm (Euklidische Norm) verträglich ist.