Nichtlineare Regelungssysteme 1 — Übung 5

Sommer 2017

Aufgabe 1

Für Systeme

$$\dot{x} = f(x)$$

mit $f(0) = 0$ und $f(x) \neq 0$ für $x \neq 0$ kann man

$$V(x) = f^{\mathrm{T}}(x) P f(x), \quad P^{\mathrm{T}} = P > 0,$$

als Kandidat für eine Lyapunov-Funktion verwenden (Methode von Krasovskii). Untersuchen Sie damit die Stabilität von $x_{\mathrm{R}} = 0$ bzgl. des Systems

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -2x_1 - x_1^3 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_2 \end{aligned}$$

Aufgabe 2

Betrachten Sie das folgende System erster Ordnung

$$\dot{y} = a\,y + u$$

mit dem unbekannten, aber konstanten, reellen Parameter a. Zur Regelung soll der (dynamische) adaptive Regler

$$u = -k\,y \qquad \text{mit} \quad \dot{k} = \gamma\,y^2, \gamma > 0$$

verwendet werden.

Zeigen Sie, daß die Größe y im mit dem adaptiven Regler geschlossenen Regelkreis asymptotisch $y = 0$ zustrebt.

Hinweis: Bei geeigneter Wahl der Zustandsgrößen kann der Ansatz

$$V(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2\gamma}(x_2 - b)^2$$

mit $b > a$ als Kandidat für eine Lyapunov-Funktion herangezogen werden.

Aufgabe 3

Für $\lambda > 0$ ist das System zweiter Ordnung

$$\ddot{e} + 2\lambda\,\dot{e} + \lambda^2 e = 0$$

asymptotisch stabil.

a) Ist $V = \frac{1}{2}(\dot{e} + \lambda\,e)^2$ positiv definit? Nimmt V für t gegen unendlich einen Grenzwert an?

b) Zeigen Sie nun alternativ mit Hilfe von V und der Folgerung aus dem Lemma von Barbălat, daß $e = 0$ asymptotisch stabil ist.

Aufgabe 4

Eine Masse m, die reibungsfrei auf einer Oberfläche gleitet, soll mit Hilfe der einstellbaren Kraft F positioniert werden. Die zugehörige Differentialgleichung lautet

$$m\ddot{x} = F\,.$$

Die Sollposition $r^\star(t)$ wird durch eine Person über einen Steuerknüppel vorgegeben. Das stetige Signal $r^\star$ wird über ein Referenzmodell der Form

$$\ddot{x}^\star(t) + c_1\dot{x}^\star(t) + c_0 x^\star(t) = c_0 r^\star(t)$$

mit geeigneten Parametern c_1, $c_2 > 0$ in ein 2fach stetig differenzierbares Referenzsignal $x^\star$ umgewandelt.

a) Wählen Sie für F ein Regelgesetz und geeignete Parameter λ_1 und λ_0 so, daß die Fehlerdynamik

$$\ddot{e} + \lambda_1\,\dot{e} + \lambda_0\,e = 0 \quad \text{mit} \quad e = x - x^\star$$

im geschlossenen Regelkreis asymptotisch stabil ist.

b) Sei $\lambda_1 = 2\lambda$ und $\lambda_0 = \lambda^2$ mit $\lambda > 0$ (vgl. Aufgabe 3). Nehmen Sie nun an, daß der Parameter m nicht genau bekannt ist und bei der Regelung statt dessen ein Schätzwert $\hat{m}$ verwendet wird.

Zeigen Sie, daß ein Certainty-Equivalence-Controller mit Parameteradaption

$$\dot{\hat{m}} = -\gamma(\dot{e} + \lambda e)(\ddot{x}^\star - 2\lambda\dot{e} - \lambda^2 e) \quad \text{mit} \quad \gamma > 0$$

garantiert, daß für Regelfehler $\lim\limits_{t\to\infty} e(t) = 0$ gilt. Ist auch $\lim\limits_{t\to\infty} \hat{m}(t) = m$ sichergestellt?