Regelungs- und Systemtechnik 1

Sommer 2016

Normalformen von Übertragungsfunktionen

- **Polynomialform:**

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}, \quad a_j, b_i \in \mathbb{R},\ m, n \in \mathbb{N}, m \leq n$$

- **Zeitkonstantenform:**

$$G(s) = K \frac{1}{s^\rho} \frac{\prod_i \left(\tau_{0i}\, s + 1\right)}{\prod_j \left(\tau_{\infty j}\, s + 1\right)} \frac{\prod_k \left(\tau_{0k}^2\, s^2 + 2\, \zeta_{0k} \tau_{0k}\, s + 1\right)}{\prod_l \left(\tau_{\infty l}^2\, s^2 + 2\, \zeta_{\infty l} \tau_{\infty l}\, s + 1\right)}$$

wobei $\rho \in \mathbb{Z}$, $\tau_{0i}, \tau_{\infty j}, \tau_{0k}, \tau_{\infty l} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\zeta_{0k}, \zeta_{\infty l} \in [0, 1)$. Faktoren dürfen mehrfach auftreten.

Alternative Darstellung mit Knickfrequenzen: $\omega = \frac{1}{\tau}$

$$G(s) = K \frac{1}{s^\rho} \frac{\prod_i \left(\frac{s}{\omega_{0i}} + 1\right)}{\prod_j \left(\frac{s}{\omega_{\infty j}} + 1\right)} \frac{\prod_k \left(\frac{s^2}{\omega_{0k}^2} + 2\, \zeta_{0k} \frac{s}{\omega_{0k}} + 1\right)}{\prod_l \left(\frac{s^2}{\omega_{\infty l}^2} + 2\, \zeta_{\infty l} \frac{s}{\omega_{\infty l}} + 1\right)}$$

Pole und Nullstellen:

  - für $\rho < 0$: $|\rho|$ Nullstellen bei $s_0 = 0$,
  - für $\rho > 0$: $|\rho|$ Polstellen bei $s_\infty = 0$,
  - reelle Nullstellen bei $s_{0i} = -\omega_{0i}$
  - reelle Polstellen bei $s_{\infty j} = -\omega_{\infty j}$
  - konjugiert komplexe Nullstellen bei $s_{0k} = -\zeta_{0k}\omega_{0k} \pm j\omega_{0k}\sqrt{1 - \zeta_{0k}^2}$, mit $j = \sqrt{-1}$
  - konjugiert komplexe Polstellen bei $s_{\infty l} = -\zeta_{\infty l}\omega_{\infty l} \pm j\omega_{\infty l}\sqrt{1 - \zeta_{\infty l}^2}$, mit $j = \sqrt{-1}$

- **Pol-Nullstellenform:**

$$G(s) = \bar{K} \frac{1}{s^\rho} \frac{\prod_i \left(s - s_{0i}\right)}{\prod_j \left(s - s_{\infty j}\right)} \frac{\prod_k \left(s^2 + 2\, \zeta_{0k}\omega_{0k}\, s + \omega_{0k}^2\right)}{\prod_l \left(s^2 + 2\, \zeta_{\infty l}\omega_{\infty l}\, s + \omega_{\infty l}^2\right)}$$

wobei $\rho \in \mathbb{Z}$, $s_{0i}, s_{\infty j}, \omega_{0k}, \omega_{\infty l} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\zeta_{0k}, \zeta_{\infty l} \in [0, 1)$. Faktoren dürfen mehrfach auftreten.

Man beachte:

Die jeweiligen Vorfaktoren sind verschieden. Es gilt:

$$G(0) = \frac{b_0}{a_0} = K = \bar{K} \frac{\prod_i (-s_{0i})}{\prod_j (-s_{\infty j})} \frac{\prod_k \omega_{0k}^2}{\prod_l \omega_{\infty l}^2}.$$