Regelungs- und Systemtechnik 1

Sommer 10

Wiederholung zur Laplacetransformation[1]

1 Definitionen

Definition 1 (Integraltransformation) *Die Abbildung $f(t) \mapsto F(s)$,*

$$F(s) = \int_{t_1}^{t_2} K(t,s) f(t)\, dt, \quad t \in \mathbb{R}, s \in \mathbb{C}$$

heißt Integraltransformation. Sie ordnet einer Funktion $f(t)$ der reellen Variablen t eine Funktion $F(s)$ der komplexen Variablen $s = \sigma + j\omega$ zu. $f(t)$ heißt Originalfunktion, ihr Definitionsbereich Originalbereich. $F(s)$ heißt Bildfunktion, ihr Definitionsbereich Bildbereich. Die Funktion $K(t,s)$ heißt Kern der Transformation.

Die spezielle Wahl des Kerns

$$K(t,s) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ e^{-st} & \text{für } t > 0 \end{cases}$$

und des Integrationsbereichs $t_1 = 0$, $t_2 = \infty$ führt auf die Laplacetransformation.

Definition 2 (Laplacetransformation) *Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stückweise stetig differenzierbar[2], und von exponentiell beschränktem Wachstum, d.h. es existieren $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, so daß gilt:*

$$(\forall t \geq 0) \quad |f(t)| < \beta e^{\alpha\, t}\,. \tag{1}$$

Dann existiert zu $s \in \mathbb{C}_\alpha := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\{z\} > \alpha\}$ das Integral

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-s\, t}\, dt\,. \tag{2}$$

Diese Abbildung heißt Laplacetransformation, F heißt Laplacetransformierte zu f und $\mathbb{C}_\alpha$ heißt Konvergenzbereich von F.Wir schreiben

$$\mathcal{L}\{f\} = F, \tag{3}$$

und führen so den Laplace-Operator $\mathcal{L}$ ein.

Durch (2) wird eine komplexe Funktion $F\colon \mathbb{C}_\alpha \to \mathbb{C}$ definiert. Man kann zeigen, daß F im gesamten Konvergenzbereich holomorph[3] ist.

Bemerkung: Das Laplace-Integral existiert nur für hinreichend großen Realteil von s — ein Beispiel: Wir berechnen die Laplacetransformierte zu $f(t) = e^{s_0 t}, s_0 \in \mathbb{C}$. Es gilt

$$\mathcal{L}\{e^{s_0 t}\} = \int_0^\infty e^{s_0 t} e^{-st}\, dt = \int_0^\infty e^{(s_0 - s)t}\, dt = \left.\frac{e^{(s_0-s)t}}{s_0 - s}\right|_0^\infty .$$

[1] Diese kurze Zusammenfassung ist in Anlehnung an [1-3] entstanden. Der Begriff der „verallgemeinerten Ableitung“ ist [3] entnommen und die Ausführungen dazu stützten sich im Wesentlichen auf diese Quelle. In [4] finden sich interessante praxisorientierte Betrachtungen zu diesem Thema.

[2] Die Ableitung $\frac{df(t)}{dt}$ ist stückweise stetig.

[3] D. h. F ist beliebig oft komplex differenzierbar.

Bei der Berechnung des uneigentlichen Integrals sind die Grenzwerte der Stammfunktion an den Integrationsgrenzen zu bestimmen. Wir überlegen uns den Grenzwert für $t \to \infty$. Es gilt

$$e^{(s_0-s)t} = e^{\mathrm{Re}\{s_0-s\}t}\big[\cos(\mathrm{Im}\{s_0-s\}t) + j\sin(\mathrm{Im}\{s_0-s\}t)\big] \to 0\,,$$

falls $\mathrm{Re}\{s_0 - s\} < 0$, d. h. falls $\mathrm{Re}\{s\} > \mathrm{Re}\{s_0\}$. Andernfalls existiert der Grenzwert nicht.

Also gilt für $\mathrm{Re}\{s\} > \mathrm{Re}\{s_0\}$

$$\mathcal{L}\{e^{s_0 t}\} = -\frac{1}{s_0 - s} = \frac{1}{s - s_0}\,.$$

In Abb. 1 ist der Konvergenzbereich schraffiert dargestellt.

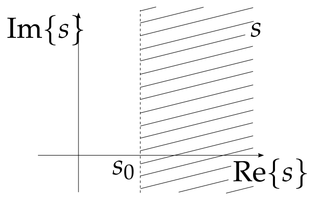

Abbildung 1: Konvergenzbereich

Die Laplacetransformation ist sowohl für stetige als auch für stückweise stetige Funktionen wohl definiert. Allerdings kommt es immer wieder zu Verwirrungen bei der Anwendung des Differentiationssatzes und der Rücktransformation bei Funktionen mit Sprungstellen. Der Grund dafür liegt darin, daß in den Ingenieurwissenschaften eine verallgemeinerte Ableitung für solchen Sprungstellen eingeführt wird, wie am Ende dieser Notiz beschrieben. Für den Differentiationssatz ergeben sich dann von der herkömmlichen Formulierung abweichende Resultate. Die Rücktransformation von Originalfunktionen mit Sprungstellen ist nicht ohne weiteres eindeutig möglich. Der Vollständigkeit halber sei aber nachfolgend die Rücktransformation für die stetigen Stücke der Originalfunktionen angegeben.

2 Rücktransformation

Für Stellen $t \geq 0$, an denen f stetig ist, gilt für das Kurvenintegral mit beliebigen $\tilde{\alpha} > \alpha$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\tilde{\alpha}-j\infty}^{\tilde{\alpha}+j\infty} e^{s\,t}F(s)\,ds\,. \tag{4}$$

Wir schreiben für die durch (4) definierte Rücktransformation[4]

$$\mathcal{L}^{-1}\{F\} = f\,. \tag{5}$$

Bemerkung: Es sei ausdrücklich darauf hingewiesen, daß die Originalfunktion f zu einer gegebenen komplexen Funktion F nur für $t \geq 0$ eindeutig ist, da Funktionswerte $f(t)$ für $t < 0$ durch die Integraltransformation ausgeblendet wurden.[5]

In der Praxis hat sich bewährt, die Rücktransformation durch geeignete Umformung und Konsultation eines umfangreichen Tabellenwerks durchzuführen. Für 'gebräuchliche' Signale $f(t)$ kann die Laplacetransformation bzw. die Rücktransformation in Tabellenwerken nachgeschlagen werden (siehe Tab. 1). Dabei wird ggf. auf die Linearität des Operators $\mathcal{L}$ sowie eine Partialbruchzerlegung im Bildbereich zurückgegriffen.

[4] Erklärt man per Definition je zwei Signale, die sich nur an Unstetigkeitsstellen voneinander unterscheiden, als äquivalent, so kann die Laplacetransformation als eine bijektive Abbildung aufgefaßt werden.

[5] Soll die Eineindeutigkeit der Abbildung $f(t) \leftrightarrow F(s)$ gewährleistet sein, so betrachtet man $f(t)$ für $t < 0$ als Null und $f(0) := \lim_{t\to+0} f(t)$.

3 Eigenschaften

Wir notieren einige für die Regelungstechnik relevante Eigenschaften der Laplacetransformation.

Linearität

Der Laplace-Operator ist linear; d.h. für je zwei Signale f und g sowie zwei Skalare $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt

$$\mathcal{L}\{\alpha f + \beta g\} = \alpha \mathcal{L}\{f\} + \beta \mathcal{L}\{g\}. \tag{6}$$

Als Konvergenzbereich ergibt sich der Durchschnitt der Konvergenzbereiche von $\mathcal{L}\{f\}$ und $\mathcal{L}\{g\}$.

Verschiebungssatz

Zu einer Originalfunktion f betrachten wir die um $\tau > 0$ auf der Zeitachse verschobene Originalfunktion g, also $g(t) = f(t-\tau)$ für $t \geq \tau$, und $g(t) = 0$ für $t < \tau$. Es gilt: [6]

$$\mathcal{L}\{g\}(s) = e^{-\tau s}\mathcal{L}\{f\}(s), \tag{7}$$

und der Konvergenzbereich von $\mathcal{L}\{f\}$ stimmt mit dem von $\mathcal{L}\{g\}$ überein.

Faltungsintegral

Für zwei Signale f und g definiert man das Faltungsintegral durch

$$(\forall t \geq 0) \quad (f * g)(t) = \int_0^t g(t-\tau)\, f(\tau)\, d\tau. \tag{8}$$

Es gilt

$$\mathcal{L}\{f * g\} = \mathcal{L}\{f\}\, \mathcal{L}\{g\}. \tag{9}$$

Offenbar ist das Faltungsintegral kommutativ.

Differentiationssatz

Wenn die zeitlichen Ableitungen $\dot{f}, \ddot{f}, \ldots, f^{(n)}$ eines Signals f für $t > 0$ existieren und die höchste auftretende Ableitung von f eine Bildfunktion besitzt, dann haben auch die niedrigeren Ableitungen einschließlich f eine Bildfunktion, und es gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\dot{f}\}(s) &= s\, \mathcal{L}\{f\}(s) - f(+0), \\ \mathcal{L}\{\ddot{f}\}(s) &= s^2\, \mathcal{L}\{f\}(s) - s f(+0) - \dot{f}(+0), \\ \mathcal{L}\{f^{(n)}\}(s) &= s^n\, \mathcal{L}\{f\}(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-1-k} f^{(k)}(+0), \end{aligned} \tag{10}$$

wobei $f(+0)$ für den rechtsseitigen Grenzwert von $f(t)$ an der Stelle $t = 0$ steht.

Bemerkung: Man beachte, dass der Differentiationssatz in dieser Form nur für Signale f Gültigkeit hat, die für $t > 0$ *keine Sprünge* aufweisen!

[6] Es wird vereinbart, Gleichungen im Bildbereich stets mit dem Zusatz ‘für alle s aus dem Konvergenzbereich’ zu lesen.

Analytizität

Innerhalb der Konvergenzhalbebene ist die Laplace-Transformierte beliebig oft nach s differenzierbar (analytisch, holomorph) und es gilt:

$$\mathcal{L}\{(-t)^n f\}(s) = \frac{d^n}{ds^n}\mathcal{L}\{f\}(s), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Bemerkung: Man beachte, dass der Satz in dieser Form nur für Signale f Gültigkeit hat, die für $t > 0$ *keine Sprünge* aufweisen!

Integral

Für die Laplacetransformation des Integrals eines Signals f gilt

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\}(s) = \frac{1}{s}\,\mathcal{L}\{f\}(s)\,. \tag{11}$$

Grenzwertsätze

Anfangswertsatz Falls für das Signal f der Grenzwert $f(+0)$ existiert, so gilt für $F = \mathcal{L}\{f\}$

$$\lim_{t\to+0} f(t) = \lim_{s\to\infty} s\,F(s)\,. \tag{12}$$

Endwertsatz Falls für das Signal f der Grenzwert $\lim_{t\to\infty} f(t)$ existiert, so gilt für $F = \mathcal{L}\{f\}$

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} s\,F(s)\,. \tag{13}$$

4 Ein Wort zur Ableitung

Bei der Untersuchung technischer Prozesse hat es sich als hilfreich erwiesen, auch Funktionen mit Sprungstellen insbesondere als Eingangssignal zu betrachten. Hier tritt jedoch die Problematik auf, daß die Ableitung solcher Funktionen an den Sprungstellen nicht definiert ist — also schlichtweg nicht existiert. Insbesondere der Differentiationssatz (10) ist in diesem Sinne anzuwenden wie folgendes Beispiel zeigt.

Beispiel Betrachte als Originalfunktion f den Einheitssprung $\sigma(t) = 1$ für $t > 0$ und $\sigma(t) = 0$ für $t \leq 0$.[7] Wir bestimmen nun die Laplacetransformierte der Ableitung $\dot{f}$:

$$\mathcal{L}\{\dot{f}\}(s) = \int_0^\infty \dot{f}(t)e^{-st}dt$$

Durch partielle Integration erhalten wir

$$\mathcal{L}\{\dot{f}\}(s) = e^{-st}f(t)\Big|_0^\infty - \int_0^\infty f(t)(-se^{-st})dt$$

[7] Oft wird auch $\sigma(0) = \frac{1}{2}$ angesetzt. Für unsere Zwecke ist es jedoch nicht relevant welchen Wert σ für $t = 0$ annimmt.

Falls f für $t = 0$ stetig ist, kann der erste Summand direkt ausgewertet werden. Anderenfalls ist für die untere Grenze der *rechtsseitige* Grenzwert zu bilden:

$$\mathcal{L}\{\dot{f}\}(s) = 0 - f(+0) + s \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt$$

Mit $f(t) = 1$ für $t > 0$ und Auswertung des Integrals erhalten wir

$$\mathcal{L}\{\dot{f}\}(s) = -1 + s \left. \frac{-1}{s} e^{-st} \right|_0^\infty = 0.$$

Wir stellen fest, daß die Laplacetransformierte der Ableitung des Einheitssprungs identisch null ist — und damit auch die Originalfunktion $\dot{f}$ der Ableitung des Einheitssprungs. Wie sich leicht prüfen läßt, ist dieses Ergebnis: für $t = 0$ existiert die Ableitung (im gewöhnlichen Sinne) nicht, und für $t \neq 0$ ist die Ableitung konstant null.

Um die Ableitung einer Funktion an ihren Sprungstellen ergänzen zu können, wird in den Ingenieurwissenschaften der Ableitungsbegriff in einem gewissen Sinne erweitert (siehe folgenden Abschnitt). Oft geschieht dies ohne ausdrücklichen Hinweis, was zu verwirrenden Resultaten bei der Anwendung des Differentiationssatzs führen kann.

5 Einheitsimpuls und Einheitssprung

Die Tatsache, daß die Ableitung der Sprungfunktion im Punkt $t = 0$ nicht definiert ist, wird in der Ingenieurwissenschaft oft als unbefriedigend empfunden. Um nun die Ableitung von Funktionen mit Sprungstellen konsistent beschreiben zu können, behilft man sich mit der Einführung des Einheitsimpulses oder Dirac'schen Stoßes δ.[8] Pragmatisch betrachtet wollen wir dies als eine Erweiterung des Lösungsbegriffes linearer Differentialgleichungen auf den Fall nicht-stetiger Eingangssignale auffassen. Dies setzt jedoch eine Verallgemeinerung der Ableitung voraus, so daß $\dot{f}$ auch für Sprungstellen definiert ist.

Im einzelnen: Der Einheitsimpuls oder Dirac'sche Stoß δ ist ein Impuls zum Zeitpunkt $t = 0$ von unendlich kurzer Dauer, also $\delta(t) = 0$ für $t \neq 0$, jedoch mit $\int \delta \equiv 1$. Es gelte:

$$\int_a^b \delta(t) f(t) dt = f(0)$$

falls $a \leq 0 \leq b$.

Für den Laplace-Operator gilt dann

$$\mathcal{L}\{\delta\} = \int_0^\infty \delta(t) e^{-st} dt = e^0 = 1.$$

Der Dirac'sche Stoß wird formal als die Ableitung des Einheitssprungs $\sigma(t)$ aufgefaßt.

Differentiationssatz für die verallgemeinerte Differentiation Sei f stetig für $t > 0$ und $\dot{f}, \ddot{f}, \ldots, f^{(n)}$ die (verallgemeinerten) zeitlichen Ableitungen im o. g. Sinne. Dann kann man zeigen, daß

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{\dot{f}\}(s) &= s\,\mathcal{L}\{f\}(s) - f(-0)\,, \\
\mathcal{L}\{\ddot{f}\}(s) &= s^2\,\mathcal{L}\{f\}(s) - sf(-0) - \dot{f}(-0)\,, \\
\mathcal{L}\{f^{(n)}\}(s) &= s^n\,\mathcal{L}\{f\}(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-1-k} f^{(k)}(-0)\,,
\end{aligned} \tag{14}$$

[8] Bei dem Dirac'schen Stoß handelt es sich um eine sogenannte Distribution. Lose gesprochen sind dies Pseudofunktionen, die über ihr Integral definiert sind.

wobei $f(-0)$ für den linkssseitigen Grenzwert von $f(t)$ an der Stelle $t = 0$ steht.

Bemerkung: Man beachte, dass der Differentiationssatz in dieser Form *auch* nur für Signale f Gültigkeit hat, die für $t > 0$ *keine Sprünge* aufweisen!

Beispiel Betrachten wir nun nochmals die Sprungfunktion σ und die Laplacetransformierte ihrer verallgemeinerten Ableitung. Durch Anwendung des Differentiationssatzes erhalten wir:

$$\mathcal{L}\{\frac{d}{dt}\sigma(t)\}(s) = s\mathcal{L}\{\sigma(t)\} - \sigma(-0)$$
$$\mathcal{L}\{\dot{f}\}(s) = s\frac{1}{s} - 0 = 1 \tag{15}$$

Wir stellen fest, daß dieses Ergebnis konsistent mit den oben eingeführten Vereinbarungen ist.

Originalfunktion	Bildfunktion	Konvergenzbereich
$f(t) = 1$	$F(s) = \frac{1}{s}$	$\mathrm{Re}\{s\} > 0$
$f(t) = t^n$	$F(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$	$\mathrm{Re}\{s\} > 0$
$f(t) = e^{-a\,t}$	$F(s) = \frac{1}{s+a}$	$\mathrm{Re}\{s\} > -a$
$f(t) = t^n e^{-a\,t}$	$F(s) = \frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$	$\mathrm{Re}\{s\} > -a$
$f(t) = \sin \omega t$	$F(s) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\mathrm{Re}\{s\} > 0$
$f(t) = \cos \omega t$	$F(s) = \frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\mathrm{Re}\{s\} > 0$
$f = \sigma$	$F(s) = \frac{1}{s}$	$\mathrm{Re}\{s\} > 0$
$f = \delta$	$F(s) = 1$	$\mathbb{C}$

Tabelle 1: Auszug einer Transformationstabelle ($n \in \mathbb{N}\,;\ a, \omega \in \mathbb{R}$)

Quellen

[1] T. Moor, K. Schmidt: *Skriptum zur Vorlesung „Einführung in die Regelungstechnik“*, Universität Erlangen-Nürnberg, Lehrstuhl für Regelungstechnik, 2006.

[2] T. Apel: *Skriptum zur Vorlesung „Mathematik II“*, Universität der Bundeswehr München, Lehrstuhl für Mathematik und Bauinformatik, 2005.

[3] O. Föllinger: *Laplace-, Fourier- und z-Transformation*, Hüthig, 2000.

[4] K. H. Lundberg, M. R. Miller, and D. L. Trumper: *Initial Conditions, Generalized Functions, and the Laplace Transform - troubles at the origin*, IEEE Control Systems Magazine, No 2, pp. 22–34, 2007.