Beiblatt 10: zur Wahl des Vorfilters bei Polvorgabereglern

Wir betrachten ein steuerbares SISO-LTI-System ohne Durchgriff

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0 \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \tag{1}$$

mit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ und $C \in \mathbb{R}^{1\times n}$. In der Vorlesung hatten wir gezeigt, daß zur Einregelung eines Ausgangssollwerts $r = \text{konst.} \neq 0$ mit einer Polvorgaberegelung ein skalares Vorfilter der Form

$$f = -\frac{1}{C(A+Bk^{\mathrm{T}})^{-1}B} \tag{2}$$

gewählt werden muß.

Wir klären nun die noch offen gebliebene Frage, unter welchen Bedingungen ein solches Vorfilter existiert, d.h. wann die rechte Seite von (2) wohldefiniert ist. Wir klären also, wann die Matrix $A + Bk^{\mathrm{T}}$ invertierbar und $C(A+Bk^{\mathrm{T}})^{-1}B$ ungleich null sind.

Da (A, B) laut Annahme steuerbar ist, wählen wir für asymptotische Stabilität des geschlossenen Regelkreises den Vektor k der Zustandsrückführung $u = k^{\mathrm{T}}x$ so, daß die Eigenwerte der Dynamikmatrix $A + Bk^{\mathrm{T}}$ des geschlossenen Regelkreises echt negativen Realteil aufweisen. Somit sind sicher alle Eigenwerte der Matrix $A + Bk^{\mathrm{T}}$ von null verschieden und die dazu inverse Matrix existiert.

Es bleibt nur noch der Fall zu untersuchen, wann der Skalar $C(A+Bk^{\mathrm{T}})^{-1}B$ gleich null ist. Infolge der Steurbarkeit von (A, B) kann das System (1) auf Regelungsnormalform transformiert werden:

$$A = P_{\mathrm{R}}^{-1}A_{\mathrm{R}}P_{\mathrm{R}}, \quad B = P_{\mathrm{R}}^{-1}B_{\mathrm{R}}, \quad C = C_{\mathrm{R}}P_{\mathrm{R}}^{-1}, \quad k^{\mathrm{T}} = k_{\mathrm{R}}^{\mathrm{T}}P_{\mathrm{R}}\,.$$

Durch Einsetzen von A, B, C und k im Nenner von (2) erhalten wir:

$$C(A+Bk^{\mathrm{T}})^{-1}B = C_{\mathrm{R}}(A_{\mathrm{R}}+B_{\mathrm{R}}k_{\mathrm{R}}^{\mathrm{T}})^{-1}B_{\mathrm{R}} =$$

$$C_{\mathrm{R}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -(a_0 - k_{\mathrm{R},0}) & -(a_1 - k_{\mathrm{R},1}) & \cdots & -(a_{n-2} - k_{\mathrm{R},n-2}) & -(a_{n-1} - k_{\mathrm{R},n-1}) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Da der Spaltenvektor B_{R} gerade die letzte Spalte der Inversen auswählt, reicht es nur diese Spalte der Inversen zu bestimmen. Am einfachsten gelingt das über die Adjunkte.

Mit $\det(A + Bk^{\mathrm{T}}) = (-1)^n(a_0 - k_{\mathrm{R},0}) \neq 0$ kann man nun leicht zeigen, daß gilt:

$$C_{\mathrm{R}}(A_{\mathrm{R}}+B_{\mathrm{R}}k_{\mathrm{R}}^{\mathrm{T}})^{-1}B_{\mathrm{R}} =$$

$$= \frac{C_{\mathrm{R}}}{\det(A+Bk^{\mathrm{T}})} \begin{pmatrix} * & \cdots & * & (-1)^{n+1} \\ * & \cdots & * & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & \cdots & * & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{C_{\mathrm{R}}}{(-1)^n(a_0 - k_{\mathrm{R},0})} \begin{pmatrix} (-1)^{n+1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{-C_{\mathrm{R},1}}{a_0 - k_{\mathrm{R},0}}\,.$$

Damit folgt schließlich

$$C(A+Bk^{\mathrm{T}})^{-1}B \neq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad C_{\mathrm{R},1} \neq 0$$

und das Vorfilter ist wohldefiniert genau dann, wenn das System (1) steuerbar ist und das erste Element des Ausgangsvektors in Regelungsnormalform ungleich null ist, d.h. $C_{\mathrm{R},1} \neq 0$. Dies ist dann der Fall, wenn die Übertragungsfunktion $G(s) = C(s\,I - A)^{-1}B$ keine Nullstelle bei $s = 0$ hat.