Beiblatt 11: Polvorgaberegler mit PI-Ausgangsrückführung

Wie in der Vorlesung eingeführt wählen wir den Regler

$$u = k^{\mathrm{T}} x(t) + K_{\mathrm{P}}\, e(t) + K_{\mathrm{I}} \int_0^t e(\tau)\, d\tau\,, \qquad k \in \mathbb{R}^n, K_{\mathrm{P}} \in \mathbb{R}, K_{\mathrm{I}} \in \mathbb{R}$$

mit dem Regelfehler

$$e(t) = r - y(t) = r - C\, x(t)$$

bzgl. des Referenz- bzw. Sollwerts r. Der erste Summand des Regelgesetzes ist der Polvorgaberegler, der mittlere der proportionale Regleranteil, der letzte der integrale Regleranteil (siehe Abbildung 1).

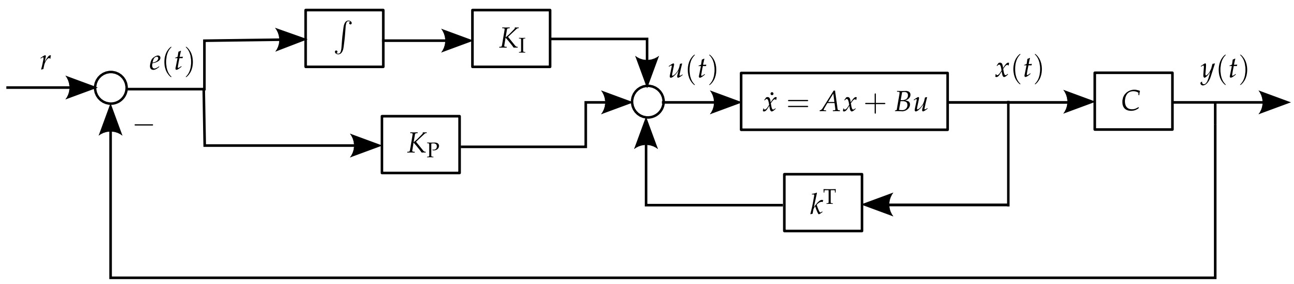

Abbildung 1: Polvorgaberegler mit PI-Ausgangsrückführung

Führen wir den Integriererzustand

$$x_{\mathrm{I}} := \int_0^t e(\tau)\, d\tau \quad \Longleftrightarrow \quad \dot{x}_{\mathrm{I}} = e = r - C\, x \quad \text{mit} \quad x_{\mathrm{I}}(0) = 0$$

ein, so können wir das Regelgesetz auch so schreiben:

$$u = K_{\mathrm{P}}(r - C\, x) + \left(k^{\mathrm{T}}, K_{\mathrm{I}}\right) \begin{pmatrix} x \\ x_{\mathrm{I}} \end{pmatrix} = K_{\mathrm{P}}\, r + \underbrace{\left(k^{\mathrm{T}} - K_{\mathrm{P}} C, K_{\mathrm{I}}\right)}_{=:\, \bar{k}^{\mathrm{T}}} \begin{pmatrix} x \\ x_{\mathrm{I}} \end{pmatrix}.$$

Wenn wir das Systemmodell um die Integriererdynamik erweitern, liegt formal das selbe Entwurfsproblem vor wie beim Polvorgaberegler mit Vorfilter.

Unter der Annahme, daß das Paar (A, B) steuerbar ist und das Vorfilter existiert, können wir die Reglerparameter $\bar{k}$, K_{P} und K_{I} wie folgt bestimmen:

1. Wir geben ein Wunschpolynom $p(\lambda)$ vom Grad $n+1$ für das charakteristische Polynom des geschlossenen Regelkreises vor und bestimmen den Vektor $\bar{k} \in \mathbb{R}^{n+1}$, nun aber bezogen auf das erweiterte System

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_{\mathrm{I}} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{pmatrix}}_{=:\, \bar{A}} \begin{pmatrix} x \\ x_{\mathrm{I}} \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix}}_{=:\, \bar{B}} u + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} r\,.$$

   D.h. in der Formel von Ackermann verwendet man dann die Matrizen $\bar{A} \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$ und $\bar{B} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$. Damit erhält man den gesuchten Vektor $\bar{k} \in \mathbb{R}^{n+1}$.

2. Mit den ersten n Einträgen des eben bestimmten Vektors $\bar{k}^{\mathrm{T}} = (\bar{k}_1, \ldots, \bar{k}_n, \bar{k}_{n+1})$ legt man nun K_{P} fest. Dazu verwenden wir die Vorfilterbeziehung für das Orginalsystem ohne den Integriererzustand (siehe auch Beiblatt 10). Damit ist

$$K_{\mathrm{P}} = -\frac{1}{C(A + B\,(\bar{k}_1, \ldots, \bar{k}_n))^{-1} B}\,.$$

3. Schließlich folgt aus der Beziehung $\bar{k}^{\mathrm{T}} = \left(k^{\mathrm{T}} - K_{\mathrm{P}} C, K_{\mathrm{I}}\right)$ dann

$$k^{\mathrm{T}} = (\bar{k}_1, \ldots, \bar{k}_n) + K_{\mathrm{P}} C \qquad \text{und} \qquad K_{\mathrm{I}} = \bar{k}_{n+1}\,.$$