

Beiblatt 15: Beobachtbarkeitskriterien

Der folgende Satz enthält eine Zusammenstellung von Beobachtbarkeitskriterien für MIMO-LTI-Systeme

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), & x(0) &= x_0 \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned}$$

mit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $C \in \mathbb{R}^{q \times n}$ und $D \in \mathbb{R}^{q \times p}$.

Satz (Beobachtbarkeitskriterien für zeitkontinuierliche MIMO-LTI-Systeme).

Die folgenden Aussagen sind einander äquivalent:

1. Das Paar (C, A) ist beobachtbar.
2. Die Matrix (Beobachtbarkeits Gramsche)

$$M(t) := \int_0^t e^{A^T \tau} C^T C e^{A \tau} d\tau$$

ist für beliebige $t > 0$ positiv definit.

3. Die Beobachtbarkeitsmatrix (nach Kalman)

$$O = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$$

hat (vollen) Rang n , d.h. es gilt: $\text{Ker}(O) = 0$.

4. Die Matrix $\begin{pmatrix} A - \lambda I \\ C \end{pmatrix}$ hat (vollen) Rang n für alle $\lambda \in \mathbb{C}$.
5. Sei λ ein beliebiger Eigenwert von A . Jeder Rechtseigenvektor w von A zum Eigenwert λ , d.h. $A w = \lambda w$, erfüllt $C w \neq 0$.
6. Es gibt eine Matrix $L \in \mathbb{R}^{n \times q}$ so, daß die Eigenwerte der Matrix $A + LC$ mittels L beliebig festgelegt werden können (mit der Einschränkung, daß komplexe Eigenwerte konjugiert komplex auftreten).
7. Das Paar (A^T, C^T) ist steuerbar.

□

Bemerkungen:

zu 3. Die Zeilen von O spannen den beobachtbaren Unterraum des \mathbb{R}^n auf, d.h. im beobachtbaren Fall gilt: $\text{Im}(O^T) = \mathbb{R}^n$ und damit $\text{Ker}(O) = 0$.

zu 6. Die Matrix $A + LC$ ist die Dynamikmatrix des Beobachterfehlersystems.