Beiblatt 2: zur Lösung von LTI-Systemen im Frequenzbereich

Die Zustandsgleichung eines zeitkontinuierlichen LTI-Systems

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0$$

kann (anders als bei zeitvarianten Systemen) problemlos Laplace-transformiert werden, d.h.

$$sX(s) - x_0 = AX(s) + BU(s)$$

mit $x(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, X(s)$ und $u(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, U(s)$. Auflösen nach $X(s)$ ergibt also

$$X(s) = (sI - A)^{-1}\, x_0 + (sI - A)^{-1}\, BU(s)\,. \tag{1}$$

Die Lösung $x(t)$ folgt per Rücktransformation der Matrix $(sI - A)^{-1}$ in den Zeitbereich.

Zur Erinnerung:

$$(q^n + q^{n-1} + \cdots + q + 1)(1 - q) = q^n + q^{n-1} + \cdots + q + 1 - q^{n+1} - q^n - \cdots - q^2 - q = 1 - q^{n+1}$$

impliziert für $q \neq 1$, daß

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}\,.$$

Gilt $|q| < 1$, so folgt für $n \to \infty$

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1 - q} = (1 - q)^{-1}$$

und die (soeben eingeführte) sogenannte geometrische Reihe konvergiert.

Idee: Wir schreiben

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{s}\left(I - \frac{A}{s}\right)^{-1}$$

und stellen die dabei auftretende Inverse als geometrische Reihe dar. Damit

$$\left(I - \frac{A}{s}\right)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{A}{s}\right)^k \tag{2}$$

konvergiert, muß gelten

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A^n}{s^n} = 0\,.$$

Um die Gültigkeit von (2), d.h. Konvergenz, sicherzustellen wählen wir also $|s| > \|A\|$.

Nunmehr gilt also

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{s}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{A}{s}\right)^k\,. \tag{3}$$

Mit dem Integrationssatz der Laplace-Transformation folgt zunächst

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{s}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{A}{s}\right)^k \bullet\!\!-\!\!\circ \int_0^t \sum_{k=0}^{\infty} A^k \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^k}\right\}(\tau)\, d\tau = \int_0^t I\,\mathcal{L}^{-1}\{1\}(\tau) + \sum_{k=1}^{\infty} A^k \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^k}\right\}(\tau)\, d\tau$$

$$= \int_0^t I\,\delta(\tau) + \sum_{k=1}^{\infty} A^k \frac{\tau^{k-1}}{(k-1)!}\, d\tau = I + \sum_{k=1}^{\infty} A^k \int_0^t \frac{\tau^{k-1}}{(k-1)!}\, d\tau = I + \sum_{k=1}^{\infty} A^k \left[\frac{\tau^k}{k!}\right]_0^t = I + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!} = e^{At}$$

Es gilt also $(sI - A)^{-1} \bullet\!\!-\!\!\circ\, e^{At}$ und wir erhalten aus (1) mittels einer Faltung das Ergebnis

$$x(t) = e^{At} x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau)\, d\tau\,. \tag{4}$$