Beiblatt 7: Lyapunov-Gleichung und exponentielle Stabilität

Man kann die Untersuchung der asymptotischen Stabilität eines linearen Systems $\dot{x} = A\,x$ auch auf die Lösung eines bestimmten linearen Gleichungssystems zurückführen.

Satz (Lyapunov-Gleichung)**.**

Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ hat genau dann Eigenwerte mit ausschließlich negativem Realteil (A ist Hurwitz), wenn die Gleichung

$$A^{\mathrm{T}} P + P\,A + Q = 0 \quad \textit{(Lyapunov-Gleichung)}$$

für jede symmetrische, positiv definite Matrix $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische, positiv definite Matrix $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ als Lösung besitzt. In diesem Fall ist die Matrix P eindeutig bestimmt. □

Beweis

notwendig ($\Leftarrow$): Wir dürfen also annehmen, daß es zu einer beliebigen Matrix $Q^{\mathrm{T}} = Q > 0$ eine eindeutige Matrix $P^{\mathrm{T}} = P > 0$ gibt, welche die Lyapunov-Gleichung löst. Mit $\dot{x} = A\,x$ und $V = x^{\mathrm{T}} P\,x$ folgt dann $\dot{V} = x^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}} P + P\,A)x = -x^{\mathrm{T}} Q\,x$. Nach der direkten Methode von Lyapunov schließen wir, daß (der Ursprung von) $\dot{x} = A\,x$ asymptotisch stabil ist. Dies ist aber gerade für diejenigen Matrizen A der Fall, deren Eigenwerte ausschließlich negativen Realteil aufweisen (A ist Hurwitz).

hinreichend ($\Rightarrow$): Wir zeigen, daß wenn A Hurwitz ist, die Matrix

$$P = \int_0^\infty e^{A^{\mathrm{T}} t} Q\, e^{At}\, dt$$

einzige Lösung der Lyapunov-Gleichung ist.

Da A Hurwitz ist, existiert das Integral und damit ist P wohldefiniert. Wir dürfen nun ein beliebiges $Q^{\mathrm{T}} = Q > 0$ voraussetzen. Die Matrix P ist symmetrisch, da Q es ist. Wegen $Q^{\mathrm{T}} = Q > 0$ läßt sich Q immer als Produkt $Q = R^{\mathrm{T}} R$ mit regulärer Matrix $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ schreiben.

Dann gilt für beliebige Vektoren $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$:

$$x^{\mathrm{T}} P\, x = \int_0^\infty x^{\mathrm{T}} e^{A^{\mathrm{T}} t} Q\, e^{At} x\, dt = \int_0^\infty x^{\mathrm{T}} e^{A^{\mathrm{T}} t} R^{\mathrm{T}} R\, e^{At} x\, dt = \int_0^\infty \|R\, e^{At} x\|^2\, dt > 0\,.$$

Folglich ist P nicht nur symmetrisch, sondern auch positiv definit.

Obiges P löst die Lyapunov-Gleichung, denn

$$\begin{aligned} A^{\mathrm{T}} P + P\,A &= \int_0^\infty A^{\mathrm{T}} e^{A^{\mathrm{T}} t} Q\, e^{At}\, dt + \int_0^\infty e^{A^{\mathrm{T}} t} Q\, e^{At}\, A\, dt = \int_0^\infty \frac{d}{dt}\left(e^{A^{\mathrm{T}} t} Q\, e^{At}\right) dt = \left[e^{A^{\mathrm{T}} t} Q\, e^{At}\right]_0^\infty \\ &= \underbrace{\lim_{t\to\infty} e^{A^{\mathrm{T}} t} Q\, e^{At}}_{=0\ (A\ \text{Hurwitz})} - Q = -Q\,. \end{aligned}$$

Diese Matrix P ist eindeutig. Denn ein anderes $P_1 \neq P$ mit $A^{\mathrm{T}} P_1 + P_1\, A = -Q$ führt auf:

$$\begin{aligned} P &= -\int_0^\infty e^{A^{\mathrm{T}} t}\left(A^{\mathrm{T}} P_1 + P_1\, A\right) e^{At} dt = -\int_0^\infty \frac{d}{dt}\left(e^{A^{\mathrm{T}} t} P_1\, e^{At}\right) dt = \left[-e^{A^{\mathrm{T}} t} P_1\, e^{At}\right]_0^\infty \\ &= \underbrace{\lim_{t\to\infty} -e^{A^{\mathrm{T}} t} P_1\, e^{At}}_{=0\ (A\ \text{Hurwitz})} + P_1 = P_1\,. \end{aligned}$$

Aus dem Widerspruch zur Annahme $P_1 \neq P$ schließen wir die Eindeutigkeit von P. ■

Mit dem eben hergeleiteten Satz kann man leicht zeigen, daß asymptotisch stabile lineare Systeme immer auch exponentiell stabil sind.

Satz (Exponentielle Stabilität asymptotisch stabiler LTI-Systeme)**.**

Sei das LTI-System $\dot{x} = A\,x$ mit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ asymptotisch stabil im Sinne Lyapunovs. Dann gibt es Zahlen $a, b > 0$ so, daß die Lösung für beliebige Anfangswerte $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ und für alle $t \geq t_0$ die Bedingung

$$\|x(t)\| \leq a\,e^{-b(t-t_0)}\|x_0\|$$

erfüllt (exponentielle Stabilität). □

Bevor wir diesen Satz beweisen, zeigen wir zunächst die Gültigkeit des folgenden Hilfssatzes.

Hilfssatz (Obere und untere Schranke einer quadratischen Form)**.**

Sei $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine beliebige symmetrische Matrix mit $\lambda_{\min}(M)$ kleinstem und $\lambda_{\max}(M)$ größtem Eigenwert von M. Dann gilt für beliebige $x \in \mathbb{R}^n$ die Beziehung

$$\lambda_{\min}(M)\,x^{\mathrm{T}}x \;\leq\; x^{\mathrm{T}}M\,x \;\leq\; \lambda_{\max}(M)\,x^{\mathrm{T}}x\,.$$ □

Beweis: Wegen der Symmetrie von M existiert eine orthogonale Transformationsmatrix $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$, die M diagonalisiert (siehe Abschnitt 6 des Beiblatts zu den mathematischen Grundlagen). D.h. wir erhalten $T^{\mathrm{T}}M\,T = \Lambda$ mit einer Diagonalmatrix $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, die aus den rellen Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ von M besteht.

Mittels $M = T\Lambda T^{\mathrm{T}}$ und $z = T^{\mathrm{T}}x$ folgt zunächst

$$x^{\mathrm{T}}M\,x = x^{\mathrm{T}}T\Lambda\,T^{\mathrm{T}}x = (T^{\mathrm{T}}x)^{\mathrm{T}}\Lambda\,T^{\mathrm{T}}x = z^{\mathrm{T}}\Lambda\,z$$

und damit offenbar auch

$$x^{\mathrm{T}}x = z^{\mathrm{T}}z\,.$$

Da die Matrix Λ diagonal ist, gilt die Beziehung

$$z^{\mathrm{T}}\Lambda\,z = \lambda_1\,z_1^2 + \cdots + \lambda_n\,z_n^2$$

und mit dem kleinsten Eigenwert $\lambda_{\min}(M)$ und dem größten Eigenwert $\lambda_{\max}(M)$ von M (alle Eigenwerte reell) erhalten wir daraus sofort die Abschätzung

$$\lambda_{\min}(M)\,z^{\mathrm{T}}z \;\leq\; z^{\mathrm{T}}\Lambda\,z \;\leq\; \lambda_{\max}(M)\,z^{\mathrm{T}}z\,.$$

Nach Ersetzung von $z^{\mathrm{T}}\Lambda\,z = x^{\mathrm{T}}M\,x$ und $z^{\mathrm{T}}z = x^{\mathrm{T}}x$ folgt unmittelbar die Behauptung. ■

Damit zeigen wir nun den Satz über die exponentielle Stabilität.

Beweis: Da (der Ursprung von) $\dot{x} = A\,x$ asymptotisch stabil ist, gibt es zu jeder positiv definiten Matrix $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine positiv definite Matrix $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$, welche die Lyapunov-Gleichung löst. Damit ist $V(x) = x^{\mathrm{T}}P\,x$ Lyapunov-Funktion und es gilt

$$\dot{V} = -x^{\mathrm{T}}Q\,x\,.$$

Wegen positiver Definitheit von P und Q gilt $0 < \lambda_{\min}(P) \leq \lambda_{\max}(P)$ und $0 < \lambda_{\min}(Q) \leq \lambda_{\max}(Q)$. Wenden wir nun den Hilfssatz auf P und Q an ($x \neq 0$), so folgt

$$\frac{\dot{V}}{V} = -\frac{x^{\mathrm{T}}Q\,x}{x^{\mathrm{T}}P\,x} \;\leq\; -\frac{\lambda_{\min}(Q)x^{\mathrm{T}}x}{\lambda_{\max}(P)\,x^{\mathrm{T}}x} = -\frac{\lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\max}(P)}\,.$$

Nach einem Resultat von Patel und Toda[1] wird der Quotient $\frac{\lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\max}(P)}$ unter der Nebenbedingung $A^{\mathrm{T}}P + P\,A + Q = 0$ mit der speziellen Wahl $Q = I$ maximiert. Damit erhält man

$$\frac{\dot{V}}{V} \leq -\frac{1}{\lambda_{\max}(P)}\,.$$

Integration führt dann auf

$$V(x(t)) \leq V(x_0)\,e^{-\frac{1}{\lambda_{\max}(P)}(t-t_0)}\,,$$

was durch Einsetzen von $V(x(t)) = x(t)^{\mathrm{T}}P\,x(t)$ und abermaliger Verwendung des Hilfssatzes weiter umgeformt werden kann:

$$\begin{aligned}
& x(t)^{\mathrm{T}}P\,x(t) && \leq && x_0^{\mathrm{T}}\,P\,x_0\,e^{-\frac{1}{\lambda_{\max}(P)}(t-t_0)} \\
\iff\quad & \lambda_{\min}(P)\,x(t)^{\mathrm{T}}x(t) && \leq && \lambda_{\max}(P)\,e^{-\frac{1}{\lambda_{\max}(P)}(t-t_0)}\,x_0^{\mathrm{T}}x_0 \\
\iff\quad & \lambda_{\min}(P)\,\|x(t)\|^2 && \leq && \lambda_{\max}(P)\,e^{-\frac{1}{\lambda_{\max}(P)}(t-t_0)}\,\|x_0\|^2 \\
\iff\quad & \|x(t)\|^2 && \leq && \frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}\,e^{-\frac{1}{\lambda_{\max}(P)}(t-t_0)}\,\|x_0\|^2 \\
\iff\quad & \|x(t)\| && \leq && \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}}\,e^{-\frac{1}{2\,\lambda_{\max}(P)}(t-t_0)}\,\|x_0\|
\end{aligned}$$

Mit den positiven reellen Zahlen $a = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}}$ und $b = \frac{1}{2\,\lambda_{\max}(P)}$ folgt dann die Behauptung. ■

Bemerkung:

Ist die Matrix A Hurwitz (wie oben angenommen), so kann man zeigen, daß der am weitesten rechts liegende Eigenwert von A eine obere Schranke setzt, d.h. wenn $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ die Eigenwerte von A sind, dann gilt: $\frac{1}{2\,\lambda_{\max}(P)} \leq -\max_i \mathrm{Re}(\lambda_i)$.

[1] R.V. Patel and M. Toda, Quantitative measures of robustness for multivariable systems. Proc. of the Joint Automatic Control Conference (JACC), San Francisco, CA, TP8-A, 1980.