Beiblatt 9: Beweis zum Steuerbarkeitskriterium über die Steuerbarkeits-Gramsche

hinreichend (⇒): Wir folgern aus der Regularität der Steuerbarkeits-Gramschen $W(t_0, t_f)$ die Steuerbarkeit des Systems Σ_t. Wir setzen also $\mathrm{Rang}(W(t_0, t_f)) = n$ voraus, d.h. $W(t_0, t_f)$ ist invertierbar.

Wir betrachten das Steuerbarkeitsproblem anhand der Lösung des Systems. Für beliebige Anfangswerte x_0 lautet die Lösung zum Zeitpunkt t_f

$$x(t_f) = \Phi(t_f, t_0)\, x_0 + \int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_f, \tau) B(\tau) u(\tau)\, d\tau\,.$$

Setzt man die stückweise stetige Wahl des Eingangssignals

$$u(t) = -B^{\mathrm{T}}(t)\Phi^{\mathrm{T}}(t_0, t) W^{-1}(t_0, t_f)\, x_0, \quad t \in [t_0, t_f] \tag{1}$$

in die Lösung ein und verwendet die Eigenschaften der Transitionsmatrix, so erhalten wir

$$\begin{aligned} x(t_f) &= \Phi(t_f, t_0)\, x_0 - \int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_f, \tau) B(\tau) B^{\mathrm{T}}(\tau) \Phi^{\mathrm{T}}(t_0, \tau)\, d\tau \;\; W^{-1}(t_0, t_f)\, x_0 \\ &= \Phi(t_f, t_0)\, x_0 - \Phi(t_f, t_0) \underbrace{\int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_0, \tau) B(\tau) B^{\mathrm{T}}(\tau) \Phi^{\mathrm{T}}(t_0, \tau)\, d\tau}_{= W(t_0, t_f)} \;\; W^{-1}(t_0, t_f)\, x_0 \\ &= \Phi(t_f, t_0)\, x_0 - \Phi(t_f, t_0)\, x_0 = 0\,. \end{aligned}$$

Damit ist das System Σ_t mit dem Eingangssignal (1) auf dem Intervall $[t_0, t_f]$ steuerbar.

notwendig (⇐): Anstelle aus der Steuerbarkeit den vollen Rang der Steuerbarkeits-Gramschen zu folgern, zeigen wir die äquivalente Aussage: Ein $\mathrm{Rang}(W(t_0, t_f)) < n$ impliziert, daß das System Σ_t nicht steuerbar ist.

Hat also $W(t_0, t_f)$ nicht vollen Rang, dann gibt es einen Vektor $x_a \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ mit $W(t_0, t_f)\, x_a = 0$. Damit folgt auch

$$0 = x_a^{\mathrm{T}}\, W(t_0, t_f)\, x_a = \int_{t_0}^{t_f} x_a^{\mathrm{T}} \Phi(t_0, t) B(t) B^{\mathrm{T}}(t) \Phi^{\mathrm{T}}(t_0, t) x_a\, dt = \int_{t_0}^{t_f} \| x_a^{\mathrm{T}} \Phi(t_0, t) B(t) \|^2\, dt\,, \tag{2}$$

eine Beziehung, die nur gelten kann, wenn

$$x_a^{\mathrm{T}} \Phi(t_0, t) B(t) = 0, \quad \forall t \in [t_0, t_f]\,. \tag{3}$$

Wollen wir nun den Anfangswert $x(t_0) = x_a \neq 0$ in den Ursprung $x(t_f) = 0$ steuern, so gilt wieder mit den Eigenschaften der Transitionsmatrix

$$\begin{aligned} & 0 = \Phi(t_f, t_0)\, x_a + \int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_f, t) B(t) u(t)\, dt \\ \Longleftrightarrow \quad & x_a = -\int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_0, t_f) \Phi(t_f, t) B(t) u(t)\, dt = -\int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_0, t) B(t) u(t)\, dt \\ \Longrightarrow \quad & x_a^{\mathrm{T}} x_a = \|x_a\|^2 = -\int_{t_0}^{t_f} \underbrace{x_a^{\mathrm{T}} \Phi(t_0, t) B(t)}_{=0} u(t)\, dt = 0 \quad \Longrightarrow x_a = 0 \end{aligned} \tag{4}$$

Dies ist ein Widerspruch zur Annahme $x_a \neq 0$ und Σ_t ist nicht steuerbar. Daraus schließen wir, daß die Steuerbarkeit des Systems Σ_t auf $[t_0, t_f]$ vollen Rang der Steuerbarkeitsmatrix $W(t_0, t_f)$ impliziert. Damit ist der Satz aus der Vorlesung bewiesen. ■