# RST2 - Epilog zur Übung 5

WS19/20

## Vorwort

**Zum Steuerbarkeitskriterum mit der Steuerbarkeitsgramschen**

Zur Einführung der Transitionsmatrix $\Phi$ und Wiederholung ihrer Eigenschaften wird zunächst das folgende freie zeitkontinuierliches System mit Zustand $x(t) \in \mathbb{R}^n$ betrachtet:

$$\dot{x} = A(t)x \quad \Rightarrow \quad x(t) = \Phi(t_f, t_0)x_0 \quad \text{mit} \quad \begin{cases} \Phi(t_f, t_0)^{-1} = \Phi(t_0, t_f) \\ \Phi(t_f, t_0) = \Phi(t_f, t_1)\Phi(t_1, t_0), \end{cases} .$$

Dies wird zur Darstellung der allgemeinen Lösung des LTV Systems mit Eingangssignal $u(t) \in \mathbb{R}$ benötigt:

$$\Sigma: \ \dot{x} = A(t)x + B(t)u\,.$$

Die dazugehörige Steurbarkeitsgramsche auf dem Intervall $[t_0, t_f]$ ist definiert als:

$$W(t_0, t_f) = \int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_0, t)B(t)B(t)^T\Phi(t_0, t)^T dt\,. \tag{1}$$

Das System $\Sigma$ ist genau dann **steuerbar** auf $[t_0, t_f]$, wenn $W(t_0, t_f) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ vollen Rang hat. Dies kann über die Auswertung der Determinante geprüft werden.

Um eine Steuersignal $u$ zu bestimmen, dass das System $\Sigma$ vom Startzustand $x_0 = x(t_0)$ in vorgegebener Zeit in den Endzustand $x(t_f)$ zu bringen, wird die allgemeine Lösung (Variation der Konstanten) umgeformt:

$$\begin{aligned}
x(t_f) &= \Phi(t_f, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_f, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau \\
&= \Phi(t_f, t_0)x_0 + \Phi(t_f, t_0)\int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_0, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau \\
\overset{\Phi(t_f,t_0)^{-1}}{\Leftrightarrow} \qquad \Phi(t_0, t_f)x(t_f) - x_0 &= \int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_0, \tau)\, B(\tau)\, \underbrace{u(\tau)}_{:=B(\tau)^T\Phi(t_0,\tau)^T v}\, d\tau \\
\Rightarrow \qquad \Phi(t_0, t_f)x(t_f) - x_0 &= \underbrace{\int_{t_0}^{t_f} \Phi(t_0, \tau)B(\tau)B(\tau)^T\Phi(t_0, \tau)^T d\tau}_{=W(t_0,t_f)}\, v
\end{aligned}$$

Wähle $v = const.$ so, dass die Gramsche kompensiert und der gewünschte Endwert $x(t_f)$ erreicht wird:

$$\boxed{u(t) = B(t)^T\Phi(t_0, t)^T W(t_0, t_f)^{-1}\left[\Phi(t_0, t_f)x(t_f) - x_0\right]}\,. \tag{2}$$

Damit erhält man eine Steuerung, mit der beliebige Anfangszustände beliebig schnell in den Ursprung $x(t_f) = 0$ überführt werden können.

Zur numerischen Berechnung der Gramschen kann die folgende Matrix-Differentialgleichung genutzt werden:

$$\frac{d}{dt}W(t, t_f) = A(t)W(t, t_f) + W(t, t_f)A(t)^T - B(t)B(t)^T \quad , \quad W(t_f, t_f) = 0\,,$$

wobei in Echtzeit ein numerisches Integrationsverfahren zur Lösung anzuwenden ist.

**Zeitinvarianter Fall**

Für ein LTI System der Form $\dot{x} = Ax + Bu$ ($A, B = const.$) reicht es zu zeigen, dass die Gramsche $W(t, 0)$ für **ein** $t > 0$ invertierbar ist ($t_0 = 0$ kann immer durch eine Zeitverschiebung erreicht werden). Auch kann die Transitionsmatrix $\Phi(t, t_0) = e^{A(t-t_0)}$ stets geschlossen berechnet werden.
Die obere Matrixdifferentialgleichung kann hier als die algebraische Lyapunovgleichung geschrieben werden:

$$AW + WA^T = -BB^T \tag{3}$$

mit einem Zeithorizont von $t_f \to \infty$. Somit kann auch hier leicht eine Lösung berechnet werden.

---

## Zusatz zur Übung

Nutzen Sie den oben beschriebenen Ansatz der Steuerbarkeitsgramschen zur Überprüfung der Steuerbarkeit linearer Systeme sowie zum direkten Steuerungsentwurf für bestimmte Zielvorgaben.

**Aufgabe 1:** Steuerbarkeitsgramsche
Gegeben ist das folgende zeitkontinuierliche LTV System:

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -1 & t \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-t} \end{pmatrix} u(t)$$

mit Anfangszustand $x(0) = x_0 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}^T$.

a) Bestimmen Sie die Transitionsmatrix $\Phi(t_f, t_0)$ des freien Systems (siehe Übung 3).
*Kontrollergebnis:*

$$\Phi(t, t_0) = \begin{pmatrix} e^{-t} & \frac{1}{2}t^2 e^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}.$$

b) Weisen Sie die Steuerbarkeit des Systems mit Hilfe des Gramschen Kriteriums nach. Ist das Rangkriterium nach Silverman & Meadows ebenfalls erfüllt?
*Hinweis:* Ziehen Sie Beiblatt 9 zum allgemeinen Verständnis zu rate.

c) Entwerfen Sie ein Steuersignal $u$ nach Gleichung (2), das das System innerhalb von $t_f = 1$ von $x(0) = x_0 = \left[\frac{2}{3}, 0\right]^T$ in den Zustand $x^* = [0, 0]^T$ überführt. Wie sieht $u(t)\, \forall t > t_f$ aus, damit das System in $x^*$ verbleibt?

**Aufgabe 2:** Gramsche & Lyapunovgleichung
Gegeben ist das folgende LTI System:

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} u(t).$$

Berechnen Sie die Steuerbarkeitsgramsche:

*(i)* mit Hilfe der Lypunovgleichung (3) unter der Annahme, dass die Gramsche die folgende Struktur hat:

$$W = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 \\ w_2 & w_3 \end{pmatrix} = W^T$$

hat, um die algebraische Matrixgleichung aufzulösen;

*(ii)* direkt über die Definition der Gramschen (1) mit $t_f \to \infty$ als Kontrollergebnis (siehe auch [1, p.252]).

## Ergänzungsaufgaben

**Aufgabe 3:** Kalmansches Rangkriterium
Prüfen Sie die Paare $(A, B)$ in *(i)* - *(vi)* auf ihre Steuerbarkeit mittel des Rangkriteriums nach Kalman:

*(i)* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *(ii)* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

*(iii)* $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ *(iv)* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

*(v)* $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *(vi)* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

**Aufgabe 4:** Regelungsnormalform
LTI Systeme sind genau dann steuerbar, wenn sie über $z = Tx$ in Regelungsnormalform transformiert werden können:

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \,.$$

Berechnen Sie für die $(A, B)$ Paare aus Aufgabe 3 ***(i),(iii),(v)*** die entsprechende Transformationsmatrix $T$ sowie die Systemmatrizen in Regelungsnormalform.

**Aufgabe 6:** Hautuskriterium
Charakterisieren Sie für die $(A, B)$ Paare aus Aufgabe 3 ***(ii),(iv),(vi)*** sie jeweils die steuerbaren und nicht-steuerbaren Moden (Zugehörigkeit nach Eigenwerten) mit Hilfe des Hautus-Kriteriums (siehe Übung 5 / Aufgabe 3).

## Numerische Betrachtungen

Nutzen Sie die Vorlagen-Dateien zur Nutzung in Matlab bzw. Octave, die auf der RST2 Webseite unter `epilog5_files.zip` (Zusatzmaterial zum Epilog 5) heruntergeladen werden können. Die Code-Beispiele im Folgenden sind dementsprechend in den enthaltenen **Vorlagen** `rst2_epilog5_NX_XXX.m` zu finden.
Im folgenden wird die folgende Zustandsraumdarstellung als Beispiel genutzt:

```
% System representation as state space structure:
A = [0 1;-1 -2];
B = [0;1];
C = [1 0];
D = 0;
sys = ss(A,B,C,D);
```

Schauen Sie sich dabei insbesondere nochmal die Struktur `ss(A,B,C,D)` an (Command Window Eingabe: "`doc ss`").

**Aufgabe N1:** Numerische Steuerbarkeitstests

Nutzen Sie gängige Funktionen zum Überprüfen Ihrer Rechenergebnisse aus den Aufgaben 3, 4 und 2 unter Verwendung der Programmiervorlage `rst2_epilog5_N1_check.m`.

a) Steuerbarkeitsmatrix:
Machen Sie sich mit der Funktion `ctrb` vertraut. Die Rangbedingung kann folgendermaßen ausgewertet werden:

```
% Compute controllability matrix:
R = ctrb(A,B);
disp(rank(R))
```

Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse aus **Aufgabe 3**.

b) Regelungsnormalform:
Die Matrixinverse kann über `inv` bestimmt werden. Basierend auf der Steuerbarkeitsmatrix aus Teil (a) kann die Transformation auf Regelungsnormalform wie folgt umgesetzt werden:

```
% Calculate transformation:
Rinv = inv(R);
q = Rinv(end,:); % last row of inverse
T = [q;q*A];
% Transform system matrices:
Ar = T*A/T;
Br = T*B;
```

Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse aus **Aufgabe 4**.

c) Gramsche (numerisch):
Machen Sie sich mit der Funktion `gram` vertraut (Erklärung zu Lyapunovgleichung in Matlab-Dokumentation). Die Steuerbarkeitsgramsche kann dann wie folgt berechnet und deren Determinante geprüft werden:

```
% Compute Controllability Gramian (LTI case):
W = gram(sys,'c');
disp(det(W))
```

Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse aus **Aufgabe 2**.

Prüfen Sie gegebenenfalls noch die Berechnungen aus der Übung 5 auf diese Weise.

**Aufgabe N2:** Symbolische Berechnung der Gramschen

Im zeitvarianten Fall kann die Funktion `gram` nicht mehr verwendet werden, weshalb eine symbolische Berechnungen (siehe auch Einführung in Epilog 3) der Gramschen aus Aufgabe 1 umgesetzt werden soll. Nutzen Sie dazu die Programmiervorlage `rst2_epilog5_N2_gramian.m`, in der viele Funktionialitäten bereits vorhanden sind und lediglich die mit "`[ ]`" gekennzeichneten Einträge ersetzt werden müssen.

a) Geben Sie die Systemmatrizen des zeitvarianten Systems in Abhängigkeit von $t$ ein. Machen Sie sich mit der vorgegebenen symbolischen Berechnung der Transitionsmatrix $\Phi(t_f, t_0)$ vertraut.
*Funktionen:* `syms`, `diff`, `subs`, `dsolve`, `jacobian`.

b) Setzen Sie die notwendige symbolische Integration von Gleichung (1) zur geschlossenen Berechnung der Gramschen $W$ in Abhängigkeit von $t_f$ und $t_0$ um. Prüfen Sie die Intervall-Steuerbarkeit
*Funktionen:* `int`.

c) Bestimmen Sie das entsprechende Steuersignal $u$ aus Gleichung (2) für die Vorgaben aus Aufgabe 1 (c). Simulieren Sie das System mit Steuerung zum überprüfen der Zielvorgaben. Stellen Sie die Ergebnisse übersichtlich dar.
*Funktionen:* `matlabFunction`, `plot`.

**Aufgabe N3:** Simulation zeitdiskreter Systeme mit Steuerung

Ziehen Sie das Beispiel des Wirtschaftsmodells aus Übung 5 / Aufgabe 2 zu Simulationszwecken heran. Nutzen Sie dazu die Programmiervorlage `rst2_epilog5_N3_discrete.m`, in der einige Berechnungen bereits vorgegeben sind und "`[ ]`" Einträge ersetzte werden müssen.

a) Geben Sie das zeitdiskrete als Zustandsraummodell `ss` mit Abtastzeit $T_s = 1y$ ein und Simulieren Sie das System für konstante Haushaltsausgaben von $u \equiv 1$ (siehe `step` Funktion).

b) Machen Sie sich mit der im Skript vordefinierten Funktion `sequ` zur Berechnung der diskreten Steuersequenz (wie in der Übung 5 hergeleitet) vertraut. Wenden Sie diese zur Kontrolle unter den Vorgaben aus Übung 5 / Aufgabe 2 (c) an.

c) Simulieren Sie abschließend das zeitdiskrete System (for-Schleife) mit der entsprechenden Steuerungen und prüfen Sie das Erreichen des gewünschten Endzustandes. Stellen Sie die Ergebnisse grafisch dar.

## Verweis auf Klausuraufgaben

- Steuerbarkeitskriterien:
  - Übungsklausur 1 (Sommer 2010) Aufgabe 3 (a)
  - Übungsklausur 2 (Winter 2010/11) Aufgaben 1 (d), 3 (a)
  - Übungsklausur 3 (Sommer 2011) Aufgabe 1 (c)
  - Übungsklausur 5 (Sommer 2012) Aufgabe 2 (a,b)
  - Übungsklausur 6 (Winter 2012/13) Aufgabe 4 (a,b)
  - Übungsklausur 7 (Winter 2012/13) Aufgaben 2 (a), 4 (a,b)
  - Übungsklausur 9 (Sommer 2014) Aufgabe 2 (b-d)
  - Übungsklausur 10 (Winter 2015/16) Aufgabe 1 (a)
  - Übungsklausur 16 (Winter 2018/19) Aufgabe 2 (Steuerbarkeitsgramsche)
  - Übungsklausur 17 (Sommer 2019) Aufgabe 3
- Zeitdiskrete Systeme und Steuerungen:
  - Übungsklausur 1 (Sommer 2010) Aufgabe 2
  - Übungsklausur 4 (Winter 2011/12) Aufgabe 3
  - Übungsklausur 6 (Winter 2012/13) Aufgabe 3
  - Übungsklausur 9 (Sommer 2014) Aufgabe 1
  - Übungsklausur 10 (Winter 2015/16) Aufgabe 2 (Abtastung)
  - Übungsklausur 11 (Sommer 2016) Aufgabe 3
  - Übungsklausur 12 (Winter 2016/17) Aufgabe 2
  - Übungsklausur 13 (Sommer 2017) Aufgabe 2

## Weiterführende Literatur & Links

**Videos:**

- Intuition of controllability (& observability):
  `https://www.youtube.com/watch?v=BYvTEfNAi38`
- Obtaining discrete-time systems:
  `https://www.youtube.com/watch?v=0dvF2jesB4E`
- Gramian, eigenvectors and control directions:
  `https://www.youtube.com/watch?v=ZNHx62HbKNA`

**Erweiterte Themenfelder:**

- Erreichbare Unterräume [1, ab S.275]: Aufteilung in steuerbaren und nicht-steuerbaren Systemanteil
- Diskrete Gramsche:
  `https://en.wikipedia.org/wiki/Controllability_Gramian#Discrete_Time_Systems`
- Diskrete Lyapunov Funktion ([3, pp.437])

[1] LUDYK, G.: *Theoretische Regelungstechnik 1 & 2*. Springer, 1995

[2] OLSDER, G. ; WOUDE, J. van d.: *Mathematical Systems Theory*. 3. Auflage. VSSD, 2004

[3] RUGH, W.: *Linear System Theory*. 2. Auflage. Prentice Hall, 1996