RST2 - Epilog zur Übung 7

WS19/20

Ergänzungsaufgaben

Verweis auf Klausuraufgaben

Weiterführende Literatur

Vorwort zum Epilog 7

In diesem Epilog werden viele Themen angesprochen. Ziel ist es die Nulldynamik von Systemen zu verstehen, Beobachtersysteme auszulegen und Rechentechnik zum schnelleren und einfacheren Rechnen zu erlangen. Außerdem wird die statische Entkopplung beispielhaft aufgezeigt.

Nulldynamik bzw. interne Dynamik: Die Nulldynamik wird betrachtet, wenn ein Folgeregler entworfen werden soll. Für den Systemausgang y wird der Relativgrad d bestimmt. Die Dimension der Nulldynamik ist $n-d$. Im besten Fall ($d=n$) gibt es also keine Nulldynamik. Die Unabhängigkeit gegenüber dem Eingang u stellt ein weiteres wichtiges Merkmal der internen Dynamik dar; d. h. $\dot{\eta} = g(\eta, y)$. Darüber hinaus ist die Zustandstransformation eindeutig und umkehrbar. Folgendes Beispiel soll die Bestimmung der Zustände der internen Dynamik veranschaulichen. Betrachtet wird das System

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \qquad y_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x \qquad y_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} x$$

Für y_1 ist der Relativgrad $d_1 = 2$. Somit existiert für diesen Ausgang keine interne Dynamik. Für den Ausgang y_2 gilt:

$$\dot{y}_2 = x_2 - x_1 - 2x_2 + u = -x_1 - x_2 + u$$

Der Relativgrad $d_2 = 1$. Für die interne Dynamik gilt demnach $n - d = 2 - 1 = 1$. Nun stellt sich die Frage, welche Zustandskombination die interne Dynamik am besten beschreibt. Die Kombination $x_1 + x_2$ *darf nicht* verwendet werden, da dies den Ausgang y_2 und somit die externe Dynamik beschreibt. Die Wahl $\eta = x_2$ funktioniert nicht, da $\dot{\eta}$ sonst vom Eingang u abhängen würde und der Zustand somit laut Definition keine interne Dynamik darstellt. Daher ist eine kluge und geeignete Wahl $\eta = x_1$. Die zugehörigen Zustandstransformationen lauten:

$$\begin{bmatrix} y \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta \\ y - \eta \end{bmatrix}$$

Die Differentialgleichung des Systems lautet:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= -y + u \\ \dot{\eta} &= -\eta - y \end{aligned}$$

Rechentechnik: Häufig kommt es vor, dass Matrizen mit Potenzindex benötigt werden, beispielsweise bei der Steuerbarkeitsmatrix nach Kalmann $R = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$. Trotz der Potenzen müssen die A^i *nicht* bestimmt werden. Dies wird deutlich, wenn die Steuerbarkeitsmatrix anders dargestellt wird:

$$R = \begin{bmatrix} B & (AB) & A(AB) & A(A^2B)) & \dots & A(A^{n-2}B) \end{bmatrix}$$

Hier wird deutlich, dass der Ausdruck in Klammern das Ergebnis der vorhergehenden Spalte ist. Es ist somit nicht erforderlich A^i zu berechnen.
Beim Reglerentwurf eines Zustandsreglers ist die Berechnung der letzten Zeile der inversen Steuerbarkeitsmatrix vonnöten. Es wird ausschließlich die letzte Zeile benötigt und somit ist die Berechnung der kompletten inversen Matrix überflüssig. Am besten nimmt man sich den Gauss-algorithmus zur Invertierung von Matrizen zu Hilfe. Folgendes Beispiel soll die Grundidee verdeutlichen:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & \star & \star & \star \\ 0 & 1 & 0 & \star & \star & \star \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{array}$$

Die Idee ist, dass sich $(M|I)$ zu $(I|M^{-1})$ verändert. Um die letzte Zeile der inversen zu bestimmen muss man nun herausfinden mit welchen mathematischen Operationen die letzte Zeile der linken Seite zu $e_n^\top = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ wird. Beim Beispiel ist leicht erkennbar, dass nur die erste Zeile von M durch 2 geteilt werden muss, um dies zu erfüllen.
Wendet man die oben genannten Rechentechniken an, kann die Berechnung einer Zustandsrückführung in kurzer Zeit durchgeführt werden:

- Berechne die Steuerbarkeitsmatrix R *ohne* A^i zu berechnen
- Berechne *nur* die letzte Zeile von R^{-1} für $q^\top$
- Berechne $k^\top = q^\top p(A) = a_0 q^\top + a_1 q^\top A + a_2(q^\top A)A + \cdots + (q^\top A^{n-1})A$ *ohne* A^i zu berechnen

Statische Entkopplung von MIMO-Systemen: Gegeben sei das System

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & p \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} u$$
$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} u$$

mit den Zuständen $x \in \mathbb{R}^4$, den Eingängen $u \in \mathbb{R}^2$ und Ausgängen $y \in \mathbb{R}^2$, sowie dem Parameter $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Zunächst wird der Vektor- und Summenrelativgrad bestimmt.

$$c_1^\mathsf{T} B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad c_1^\mathsf{T} AB = \begin{pmatrix} 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow d_1 = 2$$
$$c_2^\mathsf{T} B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow d_2 = 1$$

Das System weist den Vektorrelativgrad $d = (d_1\, d_2) = (2\, 1)$ und den Summenrelativgrad $d_\Sigma = d_1 + d_2 = 2 + 1 = 3$ auf. Da der Summenrelativgrad kleiner als die Systemordnung ist $d_\Sigma < n$ $(3 < 4)$, gibt es eine Nulldynamik. Im Fall $d_\Sigma = n$ hätte das System keine Nulldynamik.
Das System kann in eine neue Darstellung gebracht werden

$$\begin{pmatrix} y_1^{(d_1)} \\ y_2^{(d_2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} c_1^\mathsf{T} A^{d_1} \\ c_2^\mathsf{T} A^{d_2} \end{pmatrix}}_{=\tilde{A}} x + \underbrace{\begin{pmatrix} c_1^\mathsf{T} A^{d_1-1} B \\ c_2^\mathsf{T} A^{d_2-1} B \end{pmatrix}}_{=\tilde{B}} u = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} u$$

Das System ist statisch entkoppelbar, wenn $\bar{B}$ invertierbar ist. Dies ist für das vorliegende System erfüllt. Das Entkopplungsregelgesetz

$$u = Kx + Fr$$

bringt das System auf die folgende Form (Integratorketten):

$$\ddot{y}_1 = r_1 \qquad \dot{y}_2 = r_2$$

und mit den neuen Eingängen r_1 und r_2 getrennt voneinander geregelt bzw. stabilisiert werden. Die Matrizen K und F werden wie folgt berechnet

$$F = \bar{B}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$K = -\bar{B}^{-1}\bar{A} = -\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & -3 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Auch wenn ein stabilisierendes Regelgesetz für die einzelnen Ausgänge gefunden wurde, bedeutet dies nicht, dass das Gesamtsystem automatisch stabil ist. Es ist wichtig die Nulldynamik, falls vorhanden, auf Stabilität zu prüfen. Denn ist die Nulldynamik instabil, so ist das Gesamtsystem instabil! Die externe Dynamik des Systems lautet

$$y_1 = x_1 \qquad \dot{y}_1 = x_2 \qquad y_2 = x_3$$

Der einzige Zustand, der der externen Dynamik nicht zugeordnet ist, ist x_4. Die Nulldynamik lautet

$$\dot{x}_4 = p x_4$$

Für $p < 0$ ist die Nulldynamik asymptotisch stabil und für $p > 0$ ist die Nulldynamik und somit auch das Gesamtsystem instabil.

Ergänzungsaufgaben

1. Betrachtet wird folgendes System

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} x \qquad y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   (a) Zeigen Sie, dass das System beobachtbar ist.

   (b) Als Beobachter wird das System $\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + l(\hat{y} - y)$ verwendet, wobei $\hat{x} \in \mathbb{R}^2$ die Beobachterzustände darstellt. Der Beobachterfehler sei $e = \hat{x} - x$. Zeigen Sie, dass sich die Beobachterfehlerdynamik durch $\dot{e} = (A + lC)e$ ausdrücken lässt.

   (c) Entwerfen Sie die Beobachterverstärkung l so, dass die Eigenwerte der Beobachterfehlerdynamik auf -4 und -5 verschoben werden.

   (d) Geben Sie die Gesamtdynamik des Systems an. Verwenden Sie dabei den erweiterten Zustand $\bar{x} = \begin{pmatrix} x^\top & e^\top \end{pmatrix}^\top$.

2. Folgender Prozess wird betrachtet

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} u\,.$$

   (a) Bestimmen Sie jeweils den Relativgrad für die Ausgänge $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2$, $y_3 = x_3$ und $y_4 = x_1 - x_2$.

(b) Sei nun $y = x_1$. Warum ist als Zustandstransformation der internen Dynamik $\eta_1 = x_2$ und $\eta_2 = x_3$ *nicht* geeignet? Welche Zustandstransformation kann stattdessen verwendet werden?

(c) Bestimmen Sie einen Ausgang mit vollem Relativgrad.
Hinweis: Der Zustand $x_{R,1}$ des auf Regelungsnormalform transformierten Systems weist immer vollen Relativgrad auf.

3. Bestimmen Sie von folgenden Matrizen die letzte Zeile der inversen ohne die komplette Matrix zu invertieren.

$$\text{a) } M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{b) } M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } M_3 = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{d) } M_4 = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Gegeben sind die folgenden MIMO-Systeme. Prüfen Sie, ob die Systeme statisch entkoppelbar sind und geben Sie ggf. die Matrizen K und F des Entkopplungsregelgesetzes $u = Kx + Fr$ an.

(a)

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} u\,, \qquad y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} x$$

(b)

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 4 & 8 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} u\,, \qquad y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} x$$

(c)

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} u\,, \qquad y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} x$$

Numerische Betrachtungen

1. Diese Aufgebe steht im direkten Bezug zu Aufgabe 1. Schreiben Sie ein Matlab/Octave Skript, dass Ihnen die Zustände ausgibt für den Anfangswert $x_{01} = 0.1$, $x_{02} = -0.1$, $e_{01} = -0.2$ und $e_{02} = 0.2$. Vergleichen Sie die Systemzustände mit den Beobachterzuständen unter Berücksichtigung des Beobachterfehlers. Sind die Beobachterzustände beschränkt?

Verweis auf Klausuraufgaben

- Beobachterentwurf:
  - Übungsklausur 2 (Winter 2010/2011) Aufgabe 3.
  - Übungsklausur 4 (Winter 2011/2012) Aufgabe 1g).
  - Übungsklausur 5 (Sommer 2012) Aufgabe 1f).

  - Übungsklausur 6 (Winter 2012/2013) Aufgabe 3d).
  - Übungsklausur 7 (Sommer 2013) Aufgabe 2.
  - Übungsklausur 8 (Winter 2013/2014) Aufgabe 2.
  - Übungsklausur 9 (Sommer 2014) Aufgabe 1e).
  - Übungsklausur 12 (Winter 2016/2017) Aufgabe 4c).
  - Übungsklausur 13 (Sommer 2017) Aufgabe 4d) und 4e).
  - Übungsklausur 14 (Winter 2017/2018) Aufgabe 2.
  - Übungsklausur 15 (Sommer 2018) Aufgabe 4.

- Folgeregelung:
  - Übungsklausur 2 (Winter 2010/2011) Aufgabe 4.
  - Übungsklausur 4 (Winter 2011/2012) Aufgabe 2.
  - Übungsklausur 7 (Sommer 2013) Aufgabe 2.
  - Übungsklausur 10 (Winter 2015/16) Aufgabe 3.
  - Übungsklausur 14 (Winter 2017/2018) Aufgabe 3.

- Statische Entkopplung:
  - Übungsklausur 1 (Sommer 2010) Aufgabe 5.
  - Übungsklausur 4 (Winter 2011/2012) Aufgabe 4.
  - Übungsklausur 5 (Sommer 2012) Aufgabe 4.
  - Übungsklausur 8 (Winter 2013/2014) Aufgabe 1f).
  - Übungsklausur 10 (Winter 2015/16) Aufgabe 4.
  - Übungsklausur 11 (Sommer 2016) Aufgabe 5d) und 5e).
  - Übungsklausur 14 (Winter 2017/2018) Aufgabe 4.

Weiterführende Literatur

Khalil [1] beschreibt in Kapitel 13.2 im Beispiel 13.4 auf Seite 512 die Aufteilung eines linearen System in interne und externe Dynamik.
Die Entkopplungsregelung von zeitkontinuierlichen Mehrfachsystemen ist in [2] im Kapitel 8.7 ab Seite 97 (Band 2) beschrieben. Zunächst befasst sich Kapitel 8.7.2 mit zeitdiskreten Systemen bevor Kapitel 8.7.3 ab Seite 105 die zeitkontinuierlichen Systeme behandelt.

[1] KHALIL, Hassan K.: *Nonlinear Systems*. 3. Auflage. Pearson, 2001

[2] LUDYK, G.: *Theoretische Regelungstechnik 1 & 2*. Springer, 1995

[3] OLSDER, G. ; WOUDE, J. van d.: *Mathematical Systems Theory*. 3. Auflage. VSSD, 2004

[4] RUGH, W.: *Linear System Theory*. 2. Auflage. Prentice Hall, 1996