Klausur: Regelungs- und Systemtechnik 2

Audimax

Dienstag, den 23. 02. 2016

Beginn: 13.00 Uhr

Bearbeitungszeit: 120 Minuten

Modalitäten

- Als Hilfsmittel sind **nur** handschriftliche Aufzeichnungen sowie Kopien der Vorlesungs- und Übungsunterlagen zugelassen.
- Bitte schreiben Sie mit dokumentenechtem Schreibgerät (Tinte oder Kugelschreiber).
- Zur Lösung der Aufgaben ist der freie Platz nach den jeweiligen Aufgaben vorgesehen; bei Bedarf werden Ihnen weitere Lösungsblätter ausgehändigt.
- Für alle Berechnungen sind die **Lösungswege** darzustellen. Die alleinige Angabe eines Ergebnisses wird als Lösung nicht bewertet.

Name: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Studiengang: ____________________

Aufgabe	1	2	3	4		Σ
max. Punkte	22	19	20	16		77
erreichte Punkte						
					Note	

Aufgabe 1

22 Punkte

Gegeben sei das System

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= \sin(x_1) + 2\cos(x_1)\sin(x_2) + u_2\cos(x_3) \\
\dot{x}_2 &= 2\cos(x_1)\sin(x_2) + x_3 + u_1\cos(x_1) \\
\dot{x}_3 &= \sin(x_1)\cos(x_3) + \cos(x_2)\,u_1 + u_2
\end{aligned}$$

mit der Ausgangsgleichung

$$\begin{aligned}
y_1 &= \sin(x_1) + \sin(x_3) \\
y_2 &= \sin(x_3)
\end{aligned}$$

a) Zeigen Sie, daß $(\tilde{x}, \tilde{u}) = (0, 0)$ ein stationärer Betriebspunkt ist.

b) Ermitteln Sie die Systemmatrizen A, B, C und D des an dem Betriebspunkt $(\tilde{x}, \tilde{u}) = (0, 0)$ linearisierten Systems

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Delta x(t) &= A\,\Delta x(t) + B\,\Delta u(t) \\
\Delta y(t) &= C\,\Delta x(t) + D\,\Delta u(t)
\end{aligned}$$

c) Zeigen Sie, daß das linearisierte Sytem steuerbar ist.

d) Zeigen Sie, daß das linearisierte Sytem beobachtbar ist.

Aufgabe 2

19 Punkte

Gegeben ist das LTI-System

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & \pi \\ -\pi & 0 \end{pmatrix} x(t)\,.$$

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Dynamikmatrix und ihre algebraischen und geometrischen Vielfachheiten. Ist das System stabil?

b) Berechnen Sie die Transitionsmatrix des Systems mit Hilfe der Jordan-Normalform.

c) Ermitteln Sie das zugehörige Abtastsystem

$$x(k+1) = A_{\mathrm{d}}\, x(k)$$

bei äquidistanter Abtastung mit einer Abtastperiode $T \in \{1, 2, \ldots\}$.

d) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Dynamikmatrix A_{d} des Abtastsystems und ihre algebraischen und geometrischen Vielfachheiten. Ist das abgetastete System stabil?

Aufgabe 3 **20 Punkte**

Betrachten Sie das System

$$\Sigma: \quad \begin{cases} \dot{x}(t) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -\sqrt{5} \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) + \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} \delta(t) \\ y(t) &= x_1(t) \end{cases}$$

mit positiven, reellen Konstanten g_1 und g_2. Wie üblich sei $x(t)$ der Zustand, $u(t)$ der Eingang und $y(t)$ der Ausgang. Zudem sei $\delta(t)$ eine Störgröße.

Es soll eine Folgeregelung entworfen werden. Dazu sei das System zunächst ungestört, d.h. $\delta(t) = 0$.

a) Berechnen Sie den Relativgrad d des Systems.

b) Zur Zeit $t = 0$ befinde sich das System in Ruhe, d.h. $x(0) = 0$. Bestimmen Sie einen nominalen Eingang $u = u^\star(t)$, $t > 0$, der am ungestörten System in die nominalen Ausgangstrajektorie

$$y^\star(t) = 10 \sin(\omega t)$$

mit Frequenz $\omega > 0$ resultiert. Ist die erhaltene Trajektorie zum Anfangswert $x(0)$ konsistent?

Zur Regelung soll nun das nominale Modell

$$\Sigma^\star: \quad \begin{cases} \dot{x}^\star(t) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -\sqrt{5} \end{pmatrix} x^\star(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u^\star(t) \\ y^\star(t) &= x_1^\star(t) \end{cases}$$

genutzt werden. Im weiteren kann das System gestört sein, d.h. im allgemeinen $\delta(t) \neq 0$.

c) Bestimmen Sie die Folgefehlerdynamik $\dot{e}(t)$ bzgl. des Folgefehlers $e(t) = x(t) - x^\star(t)$.

Als Regelgesetz wird $u(t) = u^\star(t) + k^{\mathrm{T}}(x(t) - x^\star(t))$ verwendet.

d) Zeigen Sie, daß mit k die Eigenwerte der Fehlerdynamik beliebig vorgegeben werden können und berechnen Sie k so, daß sich ein doppelter Eigenwert bei -1 ergibt.

e) Berechnen Sie den (vektorwertigen) stationären Folgefehler $e(\infty) = \lim_{t\to\infty} e(t)$, der sich bei einer Störung $\delta(t) \equiv 3$ einstellt.

Um der Störung entgegenzuwirken, wird das Regelgesetz nun um einen Integrierer erweitert, d.h.

$$u(t) = u^\star(t) + k^{\mathrm{T}}(x(t) - x^\star(t)) + K_I \int_0^t (y(\tau) - y^\star(\tau)) \mathrm{d}\tau.$$

f) Erweitern Sie das Fehlersystem um den zusätzlichen Fehlerzustand $e_y(t) = \int_0^t y(\tau) - y^\star(\tau) \mathrm{d}\tau$.

g) Geben Sie Bedingungen dafür an, daß $\lim_{t\to\infty} y(t) - y^\star(t) = 0$ gilt.

Hinweis: Die Berechnung von k und K_I ist hierzu nicht notwendig.

Aufgabe 4

16 Punkte

Gegeben sei das folgende lineare MIMO-System

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} u(t)$$
$$y(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x(t)$$

a) Ist das System statisch entkoppelbar? Wenn ja, bestimmen Sie den Vektorrelativgrad $d = (d_1, d_2)$ des Systems.

b) Unter Zuhilfenahme der Entkopplungsregelung $u(t) = K\,x(t) + F\,r(t)$ mit $r(t) = (r_1(t), r_2(t))^{\mathrm{T}}$ soll das System in die Form

$$y_1^{(d_1)} = r_1(t)$$
$$y_2^{(d_2)} = r_2(t)$$

überführt werden. Bestimmen Sie hierfür die Matrizen K und F.

c) Wie müssen die Konstanten c_1, c_2 und c_3 im Regelgesetz

$$r_1(t) = -c_1\,y_1$$
$$r_2(t) = -c_2\,y_2 - c_3\,\dot{y}_2$$

gewählt werden, damit der geschlossene Kreis bestehend aus dieser Regelung, Entkoppungs-regelung und dem System asymptotisch stabil ist?