Fachgebiet Regelungstechnik
Leiter: Prof. Dr.-Ing. Johann Reger

TECHNISCHE UNIVERSITÄT ILMENAU

Klausur: Regelungs- und Systemtechnik 2

Helmholtz-Hörsaal
Freitag, den 22. 09. 2017
Beginn: 10.30 Uhr
Bearbeitungszeit: 120 Minuten

Modalitäten

- Als Hilfsmittel sind **nur** handschriftliche Aufzeichnungen sowie Kopien der Vorlesungs- und Übungsunterlagen sowie Übungsklausuren zugelassen.
- Bitte schreiben Sie mit dokumentenechtem Schreibgerät (Tinte oder Kugelschreiber).
- Zur Lösung der Aufgaben ist der freie Platz nach den jeweiligen Aufgaben vorgesehen; bei Bedarf werden Ihnen Zusatzblätter ausgehändigt.
- Für alle Berechnungen sind die **Lösungswege** darzustellen. Die alleinige Angabe eines Ergebnisses wird als Lösung nicht bewertet.

Name: ______________________

Matr.-Nr.: ______________________

Studiengang: ______________________

Aufgabe	1	2	3	4		Σ
max. Punkte	14	18	13	20		65
erreichte Punkte						
					Note	

Aufgabe 1 **14 Punkte**

Ein D-T_1-System mit Totzeit kann näherungsweise als Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{s}{T_1\, s + 1} \, \frac{s\tau - 1}{s\tau + 1}$$

dargestellt werden. Dabei sind T_1 und τ positive Konstanten.

a) Bestimmen Sie Matrizen A, B, C und D einer Realisierung für diese Übertragungsfunktion.

b) Wie lautet der Anfangszustand für eine der Übertragungsfunktion äquivalente Realisierung?

c) Ist das System minimalphasig?

d) Ist das freie System ($u \equiv 0$) asymptotisch stabil? Ist das System BIBO-stabil?

e) Sei nun $u \equiv 1$. Geben Sie den Grenzwert $\lim_{t\to\infty} y(t)$ an, sofern er existiert.

Aufgabe 2

18 Punkte

Gegeben sei das zeitdiskrete System

$$x(k+1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x(k) + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Geben Sie für das freie System ($u \equiv 0$) mit Anfangswert $x(0) = \begin{pmatrix} 2 & 42 & \frac{1}{2} & -2 \end{pmatrix}^\top$ an, welche Zustandsfolge $x(k)$ sich für $k = 1, 2, 3$ ergibt. Beurteilen Sie die Stabilität des freien Systems.

b) Ist das System erreichbar? Berechnen Sie die nötigen Eingangswerte $u(0)$, $u(1)$, $u(2)$ und $u(3)$, die den Anfangszustand $x(0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^\top$ in den Zustand $x(4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 7 & 0 \end{pmatrix}^\top$ führen.

Aufgabe 3

13 Punkte

Es soll das autonome LTI-System

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} x$$
$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x$$

betrachtet werden.

a) Ist das System asymptotisch stabil?

b) Ermitteln Sie die Lösung $x = x(t)$ des obigen Systems für belieben Anfangszustand $x(0) = x_0$.

c) Berechnen Sie eine Matrix P mit $P^\top = P > 0$ so, dass $V(x) = x^\mathrm{T} P\, x$ eine Lyapunov-Funktion des Systems ist.

   Hinweis: Sie können in der Lyapunov-Gleichung $P = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ mit $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ansetzen.

d) Der Betrag der Lösung kann für $t \geq 0$ durch die Ungleichung (exponentielle Stabilität)

$$\|x(t)\| \leq \alpha \exp(-\beta\, t) \|x_0\|$$

   abgeschätzt werden. Ermitteln Sie positive Konstanten α und β so, dass die Ungleichung für beliebige Anfangszustände x_0 erfüllt ist.

   Hinweis: Sollten Sie bei c) kein Ergebnis erhalten haben, können Sie $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{9}{16} \end{pmatrix}$ verwenden.

Aufgabe 4

20 Punkte

Ein Gleichstrommotor, der eine träge Welle mit magnetischer Bremse antreibt, kann als

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 10 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} u(t)$$
$$y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} x(t)$$

beschrieben werden. Dabei ist $u(t) \in \mathbb{R}$ die Eingangsspannung und $y(t) \in \mathbb{R}$ die Wellenposition. Im Zustandsvektor $x(t) \in \mathbb{R}^3$ ist x_2 die Winkelgeschwindigkeit und x_3 der Strom im Gleichstrommotor.

Die Wellenposition soll mit einem Zustandsregler mit PI-Ausgangsrückführung der Form

$$u(t) = k^\top x(t) + K_\mathrm{P}\, e(t) + K_\mathrm{I} \int_0^t e(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

geregelt werden. Dabei ist $r \equiv$ konst. die Sollposition und $e(t) = r - y(t)$ der zugehörige Regelfehler.

a) Erweitern Sie das System um den Integriererzustand

$$x_\mathrm{I}(t) = \int_0^t e(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

und geben Sie für das erweiterte System die Dynamikmatrix $\bar{A}$ und Eingangsmatrix $\bar{B}$ an.

b) Ist das erweiterte System steuerbar?

c) Bestimmen Sie die Konstanten K_P, K_I und k so, dass die Dynamikmatrix des geschlossenen Regelkreises das charakteristische Polynom $p(\lambda) = \lambda^4 + 4\lambda^3 + 6\lambda^2 + 4\lambda + 1$ hat.

Da der Sensor nur das Ausgangssignal $y = x_1$ misst, soll ein Zustandsbeobachter entworfen werden.

d) Zeigen Sie, dass das ursprüngliche System beobachtbar ist.

e) Ist auch das um den Integriererzustand erweiterte System beobachtbar? Kann der Intergiererzustand mit einem Beobachter rekonstruiert werden?