Klausur: Regelungs- und Systemtechnik 2

Audimax
Dienstag, den 13. 02. 2018
Beginn: 13.00 Uhr
Bearbeitungszeit: 120 Minuten

Modalitäten

- Als Hilfsmittel sind **nur** handschriftliche Aufzeichnungen sowie Kopien der Vorlesungs- und Übungsunterlagen sowie Übungsklausuren zugelassen.
- Bitte schreiben Sie mit dokumentenechtem Schreibgerät (Tinte oder Kugelschreiber).
- Zur Lösung der Aufgaben ist der freie Platz nach den jeweiligen Aufgaben vorgesehen; bei Bedarf werden Ihnen Zusatzblätter ausgehändigt.
- Für alle Berechnungen sind die **Lösungswege** darzustellen. Die alleinige Angabe eines Ergebnisses wird als Lösung nicht bewertet.

Name: ______________________

Matr.-Nr.: ______________________

Studiengang: ______________________

Aufgabe	1	2	3	4		Σ
max. Punkte	20	16	13	18		67
erreichte Punkte						
					Note	

Aufgabe 1

20 Punkte

Gegeben sei ein System in der Zustandsdarstellung

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = -x_2(t) - \left(1 - \frac{1}{\nu}\cos(x_1(t))\right)\sin(x_1(t))$$

wobei der Zustand $x(t) \in \mathbb{R}^2$ der Einschränkung $x_1(t) \in [0, 2\pi)$ unterliegt und der Parameter $\nu > 0$ beliebige konstante Werte annehmen kann.

a) Bestimmen Sie die Ruhelagen $\tilde{x}$ des Systems in Abhängigkeit von ν.

b) Berechnen Sie die Systemmatrix A des an einer beliebigen Ruhelage $\tilde{x}$ linearisierten Systems $\frac{d}{dt}\Delta x(t) = A\,\Delta x(t)$ mit Abweichungsgröße $\Delta x(t) = x(t) - \tilde{x}$. Ist das linearisierte System an der Ruhelage $\tilde{x} = (\pi,\ 0)^\top$ stabil?

c) Untersuchen Sie die Stabilität des linearisierten Systems an der Ruhelage $\tilde{x} = (0,\ 0)^\top$ in Abhängigkeit von ν. Für welche Werte von ν ergibt sich gegebenenfalls asymptotische Stabilität, Stabilität bzw. Instabilität?

Nun wird der Parameter ersetzt und das System um einen zusätzlichen Zustand erweitert. Es gilt

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = -x_2(t) - \left(1 - u_1(t)x_3(t)^2\cos(x_1(t))\right)\sin(x_1(t))$$
$$\dot{x}_3(t) = \cos(x_1(t)) - u_2(t)$$

mit dem neuen Zustand $x(t) \in \mathbb{R}^3$ und Eingang $u(t) \in \mathbb{R}^2$, wobei $u_1(t) > 0$.

d) Bestimmen Sie die stationären Betriebspunkte $(\tilde{x},\ \tilde{u})$ in Abhängigkeit der Vorgabe von $\tilde{x}_1$, $\tilde{x}_3$.

e) Ermitteln Sie die Systemmatrizen A und B der Linearisierung des erweiterten Systems

$$\frac{d}{dt}\Delta x(t) = A\,\Delta x(t) + B\,\Delta u(t)$$

mit den Abweichungsgrößen $\Delta x(t) = x(t) - \tilde{x}$ und $\Delta u(t) = u(t) - \tilde{u}$ um den in d) bestimmten Betriebspunkt. Dabei seien $\tilde{x}_1 = \pi$ und $\tilde{x}_3 = \sqrt{3\pi}$ vorgegeben.

f) Überprüfen Sie die Steuerbarkeit des linearisierten Systems.

Aufgabe 2

16 Punkte

Ein System hat die Zustandsdarstellung

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} x(t) \\ y(t) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} x(t)\end{aligned}$$

wobei der Ausgang y als meßbar angenommen wird.

a) Zeigen Sie, dass das System beobachtbar ist.

b) Geben Sie das System in Beobachternormalform an.

c) Entwerfen Sie einen Beobachter, welcher der Beobachterfehlerdynamik den dreifachen Eigenwert $\lambda = -1$ verleiht.

d) Bleiben die Beobachterzustände für alle Zeiten beschränkt?

Hinweis: Beachten Sie auch die Anregung durch den Systemausgang y.

Aufgabe 3

13 Punkte

Ein Rollwagen mit einer darauf beweglich gelagerte Masse genügen der Zustandsgleichung

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u(t)\,.$$

Der betrachtete Ausgang ist die Rollwagenposition $y(t) = x_1(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x$.

a) Berechnen Sie den Relativgrad des Systemausgangs y.

b) Bestimmen Sie eine Folgeregelung mit I-Anteil so, dass eine hinreichend oft differenzierbare Solltrajektorie $y^* = y^*(t)$ asymptotisch stabilisiert wird. Wählen Sie hierzu Eigenwerte bei $-2 \pm j$. Falls Sie weitere Eigenwerte benötigen, wählen Sie diese zu -1.

c) Ermitteln Sie die Nulldynamik und untersuchen Sie deren Stabilität.

Aufgabe 4

18 Punkte

Betrachten Sie das folgende MIMO-System

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A\,x(t) + B\,u(t) \\ y(t) &= C\,x(t) \end{aligned}$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ p & 0 \\ 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und reellem Parameter p.

a) Bestimmen Sie den Vektorrelativgrad $d = (d_1, d_2)$ des Systems in Abhängigkeit von p.

b) Sei nun $p = 1$. Geben Sie ein Regelgesetz der Form

$$u(t) = K\,x(t) + F\,r(t)$$

an, welches das System statisch bezüglich des neuen Eingangs r entkoppelt.

c) Geben Sie für das kanalweise entkoppelte System

$$\begin{aligned} \overset{(d_1)}{y_1}(t) &= r_1(t) \\ \overset{(d_2)}{y_2}(t) &= r_2(t) \end{aligned}$$

ein Regelgesetz an, welches dem System (mehrfache) Eigenwerte bei -1 auferlegt.

d) Wird das Gesamtsystem mit diesem Regelgesetz stabilisiert? Begründen Sie rechnerisch.

e) Sei nun $p = 0$. Kann in diesem Fall eine Entkopplungsregelung entworfen werden, welche das System vollständig asymptotisch stabilisiert?