Klausur: Regelungs- und Systemtechnik 2

Hörsaal 2

Montag, den 25. 02. 2013

Beginn: 10.00 Uhr

Bearbeitungszeit: 120 Minuten

Modalitäten

- Als Hilfsmittel sind **nur** handschriftliche Aufzeichnungen sowie Kopien der Vorlesungs- und Übungsunterlagen zugelassen.
- Bitte schreiben Sie mit dokumentenechtem Schreibgerät (Tinte oder Kugelschreiber).
- Zur Lösung der Aufgaben ist der freie Platz nach den jeweiligen Aufgaben vorgesehen; bei Bedarf werden Ihnen weitere Lösungsblätter ausgehändigt.
- Für alle Berechnungen sind die **Lösungswege** darzustellen. Die alleinige Angabe eines Ergebnisses wird als Lösung nicht bewertet.

Name: ______________________

Matr.-Nr.: ______________________

Studiengang: ______________________

Aufgabe	1	2	3	4		Σ
max. Punkte	16	10	16	13		55
erreichte Punkte						
					Note	

Aufgabe 1

16 Punkte

Gegeben ist die Zustandsgleichung der Van der Vusse Reaktion:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= -k_1\, x_1(t) - k_3\, (x_1(t))^2 + (1 - x_1(t))\, u(t)\\ \dot{x}_2(t) &= k_1\, x_1(t) - k_2\, x_2(t) - x_2(t)\, u(t)\end{aligned}$$

mit reellen positiven Konstanten k_1, k_2 und k_3. Gehen Sie davon aus, dass auch die Zustände $x_1(t)$, $x_2(t)$ und der Eingang $u(t)$ für alle Zeiten reell und positiv sind.

a) Ermitteln Sie die stationären Betriebspunkte $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{u})$ in Abhängigkeit der Vorgabe von $\tilde{x}_2$.

b) Bestimmen Sie die Systemmatrizen A und B des an einem beliebigen Betriebspunkt $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{u})$ linearisierten Systems

$$\frac{d}{dt}\Delta x(t) = A\, \Delta x(t) + B\, \Delta u(t)$$

mit den Abweichungsgrößen $\Delta x(t) := x(t) - \tilde{x}$ bzgl. $\tilde{x} = \begin{pmatrix}\tilde{x}_1\\ \tilde{x}_2\end{pmatrix}$ und $\Delta u(t) := u(t) - \tilde{u}$.

c) Welche Betriebspunkte sind asymptotisch stabil?

Hinweis: Die folgenden Teilaufgaben können unabhängig von den vorhergehenden gelöst werden.

Im weiteren betrachte man eine spezielle Wahl zweier Betriebspunkte BP_1 und BP_2 mit normierten Parametern k_1, k_2 und k_3. Für BP_1 sei die Dynamikmatrix und Eingangsmatrix der Linearisierung

$$A_1 = \begin{pmatrix}-\frac{25}{3} & 0\\ 1 & -\frac{20}{3}\end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\ -\frac{1}{10}\end{pmatrix}$$

und für BP_2 die entsprechenden Matrizen

$$A_2 = \begin{pmatrix}-\frac{5}{2} & 0\\ 1 & -\frac{5}{2}\end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix}\frac{3}{4}\\ -\frac{1}{10}\end{pmatrix}$$

d) Ist das an den Betriebspunkten BP_1 und BP_2 linearisierte System an beiden Betriebspunkten steuerbar?

e) Ist das an den Betriebspunkten BP_1 und BP_2 linearisierte System für die Wahl des Ausgangs $y = \Delta x_2$ an beiden Betriebspunkten minimalphasig?

Aufgabe 2

10 Punkte

Man betrachte das System

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t)$$
$$y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} x(t)\,.$$

Die zu entwerfende Regelung soll den Ausgang y asymptotisch stabil zu null einregeln.

a) Kann diese Aufgabe mit einem PI-Regler

$$u(t) = K_\mathrm{P}\, y(t) + K_\mathrm{I} \int_0^t y(\tau)\, d\tau, \quad K_\mathrm{P}, K_\mathrm{I} \in \mathbb{R}$$

gelöst werden? Gegebenenfalls bestimmen Sie den Bereich stabilisierender K_P und K_I.

b) Entwerfen Sie einen Zustandsregler mit PI-Ausgangsrückführung der speziellen Form

$$u(t) = k\, x_2(t) + K_\mathrm{P}\, y(t) + K_\mathrm{I} \int_0^t y(\tau)\, d\tau, \quad k, K_\mathrm{P}, K_\mathrm{I} \in \mathbb{R}$$

so, dass die Eigenwerte der Dynamikmatrix des geschlossenen Regelkreises alle bei -1 liegen.

Hinweis: Bestimmen Sie jeweils das um den Integriererzustand erweiterte System!

Aufgabe 3 **16 Punkte**

Gegeben ist ein zeitdiskretes System dritter Ordnung

$$\begin{aligned} x(i+1) &= A\,x(i) + B\,u(i) \\ y(i) &= C\,x(i) \end{aligned}$$

für $i = 0, 1, 2, \dots$ und

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Ist das freie zeitdiskrete System ($u \equiv 0$) instabil, stabil oder asymptotisch stabil?
Hinweis: A hat einen Eigenwert der algebraischen Vielfachheit 3.

b) Das gewählte Regelgesetz sei

$$u(i) = \begin{pmatrix} \frac{13}{32} & -\frac{23}{32} & \frac{35}{32} \end{pmatrix} x(i)\,.$$

Ist das System des damit geschlossenen Regelkreises asymptotisch stabil?
Hinweis: Ein Eigenwert der Dynamikmatrix des geschlossenen Regelkreises ist $\lambda_1 = \frac{1}{2}$.

c) Zeigen Sie, daß das System beobachtbar ist.

Als Beobachter diene ein System mit der Darstellung

$$\begin{aligned} \hat{x}(i+1) &= A\,\hat{x}(i) + B\,u(i) + l\,(\hat{y}(i) - y(i) - d) \\ \hat{y}(i) &= C\,\hat{x}(i) \end{aligned}$$

mit geschätztem Zustand $\hat{x}(i)$ und Ausgang $\hat{y}(i)$. Die Größe $d \in \mathbb{R}$ sei eine unbekannte konstante ausgangsseitige Störung.

d) Sei $d = 0$: Ermitteln Sie einen Vektor $l \in \mathbb{R}^3$, so daß alle Eigenwerte der Beobachterfehlerdynamikmatrix bei null liegen. Nach wie vielen Schritten verschwindet der Beobachterfehler $e(i) = \hat{x}(i) - x(i)$?

e) Sei $d \neq 0$: Bestimmen Sie (mit dem Ergebnis von Teilaufgabe d) die Beobachterfehlerdynamik unter ausgangsseitiger Störung d. Drücken Sie den Beobachterfehler in Abhängigkeit des Anfangsschätzfehlers $e(0) = e_0$ und der Störung d aus. Welcher stationäre Schätzfehler $\lim\limits_{i\to\infty} e(i)$ stellt sich ein?

Aufgabe 4 **13 Punkte**

Gegeben sei das System

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A\,x(t) + B\,u(t)\\ y(t) &= C\,x(t)\end{aligned}$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Kann ausgehend von einem beliebigen Anfangszustand $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^2$ in endlicher Zeit $t_\mathrm{f} > 0$ der Ursprung $x(t_\mathrm{f}) = 0$ erreicht werden?

b) Zeigen Sie für dieses System, daß für beliebige $t_\mathrm{f} > 0$ die Matrix

$$M = \int_0^{t_\mathrm{f}} e^{A^\mathrm{T}\tau} C^\mathrm{T} C e^{A\tau} d\tau$$

nicht regulär ist. Welche Systemeigenschaft ist damit auszuschließen?

c) Entwerfen Sie einen Zustandsregler $u = k^\mathrm{T} x$ so, daß die Dynamik $A + B\,k^\mathrm{T}$ des geschlossenen Regelkreises das charakteristische Polynom $\lambda^2 + 2\lambda + 1$ aufweist. Führt diese Wahl zu einem asymptotisch stabilen System? Welcher Wert $\lim\limits_{t\to\infty} y(t)$ wird damit gegebenenfalls eingeregelt?

d) Bestimmen Sie ein Vorfilter f für einen Zustandsregler der Form $u = k^\mathrm{T} x + f\,r$ mit k nach den Vorgaben von Teilaufgabe c) und $r \neq 0$ so, daß für den Ausgang y stationär $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = r$ gilt.