Klausur: Regelungs- und Systemtechnik 2

Kirchhoff-Hörsaal 1
Donnerstag, den 19. 09. 2013
Beginn: 09.30 Uhr
Bearbeitungszeit: 120 Minuten

Modalitäten

- Als Hilfsmittel sind **nur** handschriftliche Aufzeichnungen sowie Kopien der Vorlesungs- und Übungsunterlagen zugelassen.
- Bitte schreiben Sie mit dokumentenechtem Schreibgerät (Tinte oder Kugelschreiber).
- Zur Lösung der Aufgaben ist der freie Platz nach den jeweiligen Aufgaben vorgesehen; bei Bedarf werden Ihnen weitere Lösungsblätter ausgehändigt.
- Für alle Berechnungen sind die **Lösungswege** darzustellen. Die alleinige Angabe eines Ergebnisses wird als Lösung nicht bewertet.

Name: ____________________

Matr.-Nr.: ____________________

Studiengang: ____________________

Aufgabe	1	2	3	4		Σ
max. Punkte	16	27	18	15		76
erreichte Punkte						
					Note	

Aufgabe 1

16 Punkte

Gegeben ist die Übertragungsfunktion eines PID-Reglers in der Form

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = K_{\mathrm{P}} \left(1 + K_{\mathrm{I}} \frac{1}{s} + K_{\mathrm{D}} \frac{s}{1 + s\,T} \right) \quad \text{mit} \quad K_{\mathrm{P}}, K_{\mathrm{I}}, K_{\mathrm{D}} \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad T > 0\,.$$

Dabei ist $\mathcal{L}\{u\}(t) = U(s)$ das Laplace-transformierte Eingangssignal und $\mathcal{L}\{y\}(t) = Y(s)$ das Laplace-transformierte Aussgangssignal.

a) Bestimmen Sie eine Realisierung dieser Übertragungsfunktion als Zustandsraummodell mit Zustand $x(t)$, Eingang $u(t)$ und Ausgang $y(t)$!

b) Ist das freie System ($u \equiv 0$) stabil?

c) Bestimmen Sie den Relativgrad des Systems bzgl. Ausgang y !

d) Für welche Parameterwerte weist das System ausschließlich minimalphasige Nullstellen auf? Wann sind sie reell?

Aufgabe 2

27 Punkte

Man betrachte das vereinfachte Zustandsraummodell eines Gleichstrommotors

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{K}{L} \\ \frac{K}{J} & -\frac{B}{J} \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{pmatrix} u(t)$$

mit x_1 Ankerstrom, x_2 Winkelgeschwindigkeit der Motorwelle und u als einstellbare Ankerspannung. Die Konstanten R, L, K, B und J seien sämtlich positive reelle Zahlen.

a) Zeigen Sie, daß die Steuerbarkeitsmatrix des Systems invertierbar ist!

b) Berechnen Sie mithilfe der Steuerbarkeitsmatrix einen flachen Ausgang y_f des Systems!

c) Bestimmen Sie den Relativgrad d des Ausgangs $y = x_2$! Ist das System mit Ausgang y minimalphasig? Ist y ebenso ein flacher Ausgang?

d) Entwerfen Sie nun einen Folgeregler, der für eine Solltrajektorie $y^\star = y^\star(t)$ den Folgefehler $e(t) = y(t) - y^\star(t)$ asymptotisch stabil zu null ausregelt! Wählen Sie dabei die Reglerparameter so, daß das charakteristische Polynom der Fehlerdynamik nur Pole bei -1 aufweist.

e) Betrachten Sie die Solltrajektorie

$$y^\star(t) = \begin{cases} 60t^5 - 150t^4 + 100t^3, & 0 \le t \le 1 \\ 10, & t > 1 \end{cases}$$

Erfüllt diese Wahl die Differenzierbarkeitsanforderungen der Folgeregelung?

Die Messung von x_1 (Strommessung) ist mitunter sehr verrauscht. Deshalb sollen in der Regelung Zustandsschätzungen auf Basis eines Beobachters bzgl. $y = x_2$ verwendet werden.

f) Zeigen Sie, daß die Beobachtbarkeitsmatrix invertierbar ist.

g) Berechnen Sie die Beobachterverstärkung $l \in \mathbb{R}^2$ so, daß die Beobachterfehlerdynamik nur Pole bei -2 aufweist.

Hinweis: Die Aufgabenteile f und g sind unabhängig von den vorherigen Teilaufgaben lösbar.

Aufgabe 3

18 Punkte

Gegeben ist ein Zustandsraummodell einer Maxwell-Wien-Brückenschaltung

$$\dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t)$$
$$y(t) = C\,x(t)$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{R_2+R_L}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{C}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_C}\right) \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{L} \\ \frac{1}{R_1 C} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} R_2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dabei ist x_1 der Spulenstrom, x_2 die Kondensatorspannung und y die gemessene Brückenspannung. Die Parameter R_1, R_2, R_C, R_L (Widerstände), L (Spuleninduktivität) und C (Kondensatorkapazität) seien alle positive reelle Zahlen.

a) Ist der Systemausgang y unter konstanter Erregung $u \equiv$ konst. beschränkt?

b) Bestimmen Sie für beliebige Stellsignale $u \equiv$ konst. den stationären Zustand $\bar{x} = \lim_{t\to\infty} x(t)$ und die stationäre Brückenspannung $\bar{y} = \lim_{t\to\infty} y(t)$! Wir welche Parameterwerte ist $\bar{y} = 0$?

c) Für welche Parameterwerte ist das System nicht steuerbar?

d) Für welche Parameterwerte ist das System nicht beobachtbar?

e) Sei nun vereinfachend $R_L = \frac{1}{R_C} = 0$ und $R_1 > 1$. Für welche Werte der übrigen Parameter ist das System minimalphasig?

Aufgabe 4

15 Punkte

Gegeben sei das System

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A\,x(t) + B\,u(t)\\ y(t) &= C\,x(t)\end{aligned}$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Zeigen Sie für dieses System, daß für beliebige $t_\mathrm{f} > 0$ die Matrix

$$W = \int_0^{t_\mathrm{f}} e^{A\tau} B B^\mathrm{T} e^{A^\mathrm{T}\tau} d\tau$$

invertierbar ist! Welche Systemeigenschaft liegt damit vor?

b) Kann ausgehend von einem beliebigen Anfangszustand $x(0) \in \mathbb{R}^3$ in einer beliebigen Zeit $t_\mathrm{f} > 0$ ein beliebiger Zustand $x(t_\mathrm{f}) \in \mathbb{R}^3$ erreicht werden?

c) Entwerfen Sie einen Zustandsregler $u = k^\mathrm{T} x$ so, daß die Matrix $A + B\,k^\mathrm{T}$ das charakteristische Polynom $\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1$ aufweist. Führt diese Wahl im geschlossenen Regelkreis zu einem asymptotisch stabilen System? Welcher Wert $\lim_{t\to\infty} y(t)$ wird damit ggf. eingeregelt?

d) Bestimmen Sie ein Vorfilter f für einen Zustandsregler der Form $u = k^\mathrm{T} x + f r$ mit k nach den Vorgaben von Teilaufgabe c und $r \neq 0$ so, daß für den Ausgang stationär $\lim_{t\to\infty} y(t) = r$ gilt.