Beiblatt 10: Positiv semidefinite stabilisierende Lösung der ARG

Wir zeigen, daß die in der Vorlesung angegeben Bedingungen notwendig und hinreichend dafür sind, daß die stabilisierende Lösung der algebraischen Riccati-Gleichung positiv semidefinit ist.

Beweis:

Mit dem Popov-Belevich-Hautus-Eigenvektortest (PBH-Test) zeigt man leicht zeigt, daß das Paar (A, B) genau dann stabilisierbar ist, wenn as Paar $(A, BB^\top)$ stabilisierbar ist. Zudem ist $-BB^\top$ stets negativ semidefinit, wie in den Voraussetzungen des Hilfssatzes zur Existenz einer stabilisierenden Lösung der algebraischen Riccati-Gleichung gefordert.

In Ergänzung zum Hilfssatz bleibt also noch zu zeigen, daß die angegebene Hamiltonsche Matrix H genau dann einen Eigenwert auf der imaginären Achse hat, wenn das Paar $(\bar{Q}, A)$ nicht-beobachtbare Moden auf der imaginären Achse aufweist. Darüber hinaus muß die Lösung der zugehörigen algebraischen Riccati-Gleichung positiv semidefinit sein.

Hat H einen Eigenwert $j\omega$ auf der imaginären Achse, dann gibt es Vektoren v_1 und v_2, so daß

$$\begin{pmatrix} A & -B\,B^\top \\ -\bar{Q}^\top\bar{Q} & -A^\top \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = j\omega \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \neq 0 \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \quad & \begin{pmatrix} v_2 \\ v_1 \end{pmatrix}^\star \begin{pmatrix} A & -B\,B^\top \\ -\bar{Q}^\top\bar{Q} & -A^\top \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} &= j\omega \begin{pmatrix} v_2 \\ v_1 \end{pmatrix}^\star \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \\
\Longleftrightarrow \quad & v_2^\star(A - j\omega\, I)v_1 - v_1^\star(A - j\omega\, I)^\star v_2 &= v_2^\star BB^\top v_2 + v_1^\star \bar{Q}^\top \bar{Q} v_1 \\
\Longleftrightarrow \quad & v_2^\star(A - j\omega\, I)v_1 - (v_2^\star(A - j\omega\, I)v_1)^\star &= v_2^\star BB^\top v_2 + v_1^\star \bar{Q}^\top \bar{Q} v_1 \\
\Longleftrightarrow \quad & v_2^\star(A - j\omega\, I)v_1 - \overline{(v_2^\star(A - j\omega\, I)v_1)} &= v_2^\star BB^\top v_2 + v_1^\star \bar{Q}^\top \bar{Q} v_1 \\
\Longleftrightarrow \quad & 2j\,\mathrm{Im}\,(v_2^\star(A - j\omega\, I)v_1) &= v_2^\star BB^\top v_2 + v_1^\star \bar{Q}^\top \bar{Q} v_1
\end{aligned}$$

Da die rechte Seite der Gleichung reell ist, folgt zunächst $\mathrm{Im}\,(v_2^\star(A - j\omega\, I)v_1) = 0$ und damit

$$B^\top v_2 = 0 \quad \text{und} \quad \bar{Q}v_1 = 0\,. \tag{2}$$

Aus Gleichung (1) erhalten wir demnach

$$A\,v_1 = j\omega\, v_1 \quad \text{und} \quad A^\top v_2 = -j\omega\, v_2 \tag{3}$$

und in die Beziehungen (2) und (3) eingefügt schließlich

$$\begin{pmatrix} A - j\omega\, I \\ \bar{Q} \end{pmatrix} v_1 = 0 \tag{4}$$

$$v_2^\star\,(A - j\omega\, I,\ B) = 0\,. \tag{5}$$

Nach Voraussetzung ist das Paar (A, B) stabilisierbar. Aus (5) schließen wir $v_2 = 0$. Wegen (1) ist dann aber $v_1 \neq 0$ und mit (4) folgt, daß es mindestens eine nicht-beobachtbare Mode auf der imaginären Achse gibt. Die Umkehrung gilt entsprechend.

Um einzusehen, daß für die Lösung X der algebraischen Riccati-Gleichung $X \geq 0$ gilt, betrachten wir die zu H gehörige algebraische Riccati-Gleichung

$$A^\top X + XA - XBB^\top X + \bar{Q}^\top\bar{Q} = 0 \iff (A - BB^\top X)^\top X + X(A - BB^\top X) + XBB^\top X + \bar{Q}^\top\bar{Q} = 0 \tag{6}$$

Da X eine stabilisierende Lösung der Riccati-Gleichung (6) ist, folgt $A - BB^\top X$ ist Hurwitz und damit hat Gleichung (7) interpretiert als Lyapunov-Gleichung eine eindeutige Lösung der Form

$$X = \int_0^\infty e^{(A-BB^\top X)^\top t}\left(XBB^\top X + \bar{Q}^\top\bar{Q}\right)e^{(A-BB^\top X)t}dt \geq 0\,. \tag{7}$$