Beiblatt 11: zum Satz über $\mathcal{H}_\infty$-Ausgangsregler

Das Entwurfsproblem kann in den Entwurf einer Zustandsrückführung und eines Beobachters aufgeteilt werden.

Nach Voraussetzung lauten die Systemgleichungen

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1 w + B_2 u \\ z &= C_1 x + D_{12} u \\ y &= C_2 x + D_{21} w \end{aligned} \tag{1}$$

Mit einer Zustandsrückführung vom Typ $u = Fx$ erhalten wir daraus

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A + B_2 F)x + B_1 w \\ z &= (C_1 + D_{12} F)x \end{aligned} \tag{2}$$

Sei T_{zw} die Übertragungsfunktion von w nach z. Wenden wir auf Gleichung (2) die Folgerung aus dem Bounded-Real-Lemma an, so gilt $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$ dann und nur dann, wenn es eine Lösung $X \geq 0$ der algebraischen Riccati-Gleichung

$$X(A + B_2 F) + (A + B_2 F)^\top X + \frac{1}{\gamma^2} X B_1 B_1^\top X + (C_1 + D_{12} F)^\top (C_1 + D_{12} F) = 0 \tag{3}$$

mit stabiler Matrix $A + B_2 F + \frac{1}{\gamma^2} B_1 B_1^\top X$ gibt.

Wir vereinfachen (3) mit Hilfe der getroffenen Annahmen (iii) und (iv), d.h.

$$XA + A^\top X + XB_2 F + F^\top B_2^\top X + \frac{1}{\gamma^2} X B_1 B_1^\top X + C_1^\top C_1 + \underbrace{C_1^\top D_{12}}_{=0} F + F^\top \underbrace{D_{12}^\top C_1}_{=0} + F^\top \underbrace{D_{12}^\top D_{12}}_{=I} F = 0 \tag{4}$$

und bekommen infolge einer quadratischen Ergänzung

$$XA + A^\top X + \frac{1}{\gamma^2} X B_1 B_1^\top X - X B_2 B_2^\top X + C_1^\top C_1 + (F + B_2^\top X)^\top (F + B_2^\top X) = 0\,. \tag{5}$$

Wählen wir $F = F_\infty$ mit $F_\infty = -B_2^\top X_\infty$ für die Zustandsrückführung, dann ist $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$ dann und nur dann, wenn eine Lösung $X_\infty \geq 0$ der modifizierten algebraischen Riccati-Gleichung

$$X_\infty A + A^\top X_\infty + \frac{1}{\gamma^2} X_\infty B_1 B_1^\top X_\infty - X_\infty B_2 B_2^\top X_\infty + C_1^\top C_1 = 0 \tag{6}$$

existiert mit $A + \frac{1}{\gamma^2} B_1 B_1^\top X_\infty - B_2 B_2^\top X_\infty$ stabil. Dies ist Bedingung (i) im Satz.

Im nächsten Schritt konstruieren wir eine Ausgangsrückführung. Dazu stellen wir zunächst fest, daß mit der Existenz der stabilisierenden Lösung X_∞ im über $u = F_\infty x$ geschlossenen Regelkreis $x(\infty) = 0$ folgt. Nehmen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $x(0) = 0$ an[1], dann gilt:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \|z(t)\|^2 - \gamma^2 \|w(t)\|^2 \, dt &= \int_0^\infty \|z(t)\|^2 - \gamma^2 \|w(t)\|^2 + \frac{d}{dt}\left(x^\top X_\infty x\right) \, dt \\ &\overset{X_\infty^\top = X_\infty}{=} \int_0^\infty \|z(t)\|^2 - \gamma^2 \|w(t)\|^2 + 2x^\top X_\infty \dot{x} \, dt \\ &\overset{(1)}{=} \int_0^\infty \underbrace{\|C_1 x(t)\|^2 + \|u(t)\|^2}_{(iii)} - \gamma^2 \|w(t)\|^2 + 2x^\top X_\infty \left(Ax + B_1 w + B_2 u\right) \, dt\,. \end{aligned}$$

[1] Für $x(0) = x_0 \neq 0$ muß auf der rechten Seite $x_0^\top X_\infty x_0$ ergänzt werden.

Umordnen und zusammenfassen von Quadraten liefert:

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \|z(t)\|^2 - \gamma^2\|w(t)\|^2\, dt \\
&\quad= \int_0^\infty x^\top \left(C_1^\top C_1 + X_\infty A + A^\top X_\infty\right) x + \|u(t)\|^2 - \gamma^2\|w(t)\|^2 + 2x^\top X_\infty \left(B_1 w + B_2 u\right)\, dt \\
&\quad\overset{(6)}{=} \int_0^\infty x^\top \left(X_\infty B_2 B_2^\top X_\infty - \frac{1}{\gamma^2} X_\infty B_1 B_1^\top X_\infty\right) x + \|u(t)\|^2 - \gamma^2\|w(t)\|^2 + 2x^\top X_\infty \left(B_1 w + B_2 u\right)\, dt \\
&\quad= \int_0^\infty \|B_2^\top X_\infty x(t)\|^2 - \frac{1}{\gamma^2}\|B_1^\top X_\infty x(t)\|^2 + \|u(t)\|^2 - \gamma^2\|w(t)\|^2 + 2x^\top X_\infty \left(B_1 w + B_2 u\right)\, dt \\
&\quad= \int_0^\infty \|B_2^\top X_\infty x(t)\|^2 + \|u(t)\|^2 + 2x^\top X_\infty B_2 u - \frac{1}{\gamma^2}\|B_1^\top X_\infty x(t)\|^2 - \gamma^2\|w(t)\|^2 + 2x^\top X_\infty B_1 w\, dt \\
&\quad= \int_0^\infty \left\|B_2^\top X_\infty x(t) + u(t)\right\|^2 - \gamma^2\left\|w(t) - \frac{1}{\gamma^2} B_1^\top X_\infty x(t)\right\|^2 dt
\end{aligned}$$

Wir führen die neuen Größen v und r gemäß den Beziehungen

$$v = u + B_2^\top X_\infty x = u - F_\infty x \tag{7}$$

$$r = w - \frac{1}{\gamma^2} B_1^\top X_\infty x\,. \tag{8}$$

ein, haben also oben gezeigt, daß

$$\int_0^\infty \|z(t)\|^2 - \gamma^2\|w(t)\|^2\, dt = \int_0^\infty \|v(t)\|^2 - \gamma^2\|r(t)\|^2\, dt\,. \tag{9}$$

Mit der Interpretation der $\mathcal{H}_\infty$-Norm als $\mathcal{L}_2$-Verstärkung

$$\int_0^\infty \|z(t)\|^2\, dt \leq \|T_{zw}\|_\infty^2 \int_0^\infty \|w(t)\|^2\, dt$$

folgt aus Gleichung (9) auch, daß

$$\|T_{zw}\|_\infty \leq \gamma \quad\Longleftrightarrow\quad \|T_{vr}\|_\infty \leq \gamma\,. \tag{10}$$

In den neuen Größen drückt sich (1) nunmehr aus als

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \left(A + \tfrac{1}{\gamma^2} B_1 B_1^\top X_\infty\right) x + B_1 r + B_2 u \\
v &= -F_\infty x + u \\
y &\overset{(iv)}{=} C_2 x + D_{21} r
\end{aligned} \tag{11}$$

Der Ursprung $x = 0$ dieses Systems ist für $r = 0$ und $u = -B_2^\top X_\infty x$ asymptotisch stabil, wenn $A + \frac{1}{\gamma^2} B_1 B_1^\top X_\infty - B_2 B_2^\top X_\infty$ stabil ist.

Weiterhin kann man aus (9) sofort ersehen, daß $r = 0$, d.h. $w = \frac{1}{\gamma^2} B_1^\top X_\infty x$, die Wirkung auf den Ausdruck $\int_0^\infty \|z(t)\|^2 - \gamma^2\|w(t)\|^2\, dt$ maximiert und daß $v = 0$, d.h. $u = F_\infty x$, die Wirkung minimiert (Sattelpunktproblem). In diesem Sinne ist die getroffene Wahl des Regelgesetzes bei beliebigen Störungen die beste Wahl, wenn die Zustände bekannt sind.

Zur Schätzung des Zustands $\hat{x}$ in der Rückführung $u = F_\infty \hat{x}$ setzen wir einen Luenberger-Beobachter bzgl. des Systems (11) im „schlimmsten“ Fall an ($r = 0$), d.h. wählen den Ansatz

$$\dot{\hat{x}} = \left(A + \frac{1}{\gamma^2} B_1 B_1^\top X_\infty\right)\hat{x} + B_2 u + L(C_2\hat{x} - y) \tag{12}$$

und erhalten mit dem Schätzfehler $e := x - \hat{x}$ die Fehlerdynamik

$$\begin{aligned} \dot{e} &= \left(A + \tfrac{1}{\gamma^2} B_1 B_1^\top X_\infty + LC_2\right) e + (B_1 + LD_{21}) r \\ v &= -F_\infty e\,. \end{aligned} \tag{13}$$

Im Beobachteransatz ist noch die Beobachterverstärkung L zu wählen.

Nach Beziehung (10) gilt mit $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$ äquivalent auch $\|T_{vr}\|_\infty < \gamma$. Somit schließen wir aus der Folgerung zum Bounded-Real-Lemma, daß genau dann wenn $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$, es eine Matrix $Y \geq 0$ gibt, welche die algebraische Riccati-Gleichung bzgl. (13) in der Form

$$Y(A+\frac{1}{\gamma^2}B_1B_1^\top X_\infty + LC_2)^\top + (A+\frac{1}{\gamma^2}B_1B_1^\top X_\infty + LC_2)Y + \frac{1}{\gamma^2}YF_\infty^\top F_\infty Y + (B_1+LD_{21})(B_1+LD_{21})^\top = 0 \tag{14}$$

löst.

Unter Verwendung von Annahme (iv) und einer quadratischen Ergänzung zeigt man, daß diese Gleichung äquivalent zur Riccati-Gleichung

$$Y(A+\frac{1}{\gamma^2}B_1B_1^\top X_\infty)^\top + (A+\frac{1}{\gamma^2}B_1B_1^\top X_\infty)Y + \frac{1}{\gamma^2}YF_\infty^\top F_\infty Y + B_1B_1^\top - YC_2^\top C_2 Y + (L+YC_2^\top)(L+YC_2^\top)^\top = 0 \tag{15}$$

ist.

In Anlehnung an die Wahl der Zustandsrückführung wählen wir nun die Beobachterverstärkung zu $L = -YC_2^\top$ und erhalten

$$Y(A+\frac{1}{\gamma^2}B_1B_1^\top X_\infty)^\top + (A+\frac{1}{\gamma^2}B_1B_1^\top X_\infty)Y + \frac{1}{\gamma^2}YF_\infty^\top F_\infty Y + B_1B_1^\top - YC_2^\top C_2 Y = 0 \tag{16}$$

Wenn man nun $F_\infty = -B_2^\top X_\infty$ ersetzt und B_2 unter Verwendung von Riccati-Gleichung (6) eliminiert, erhält man mit Hilfe der Transformation

$$Y = \left(I - \frac{1}{\gamma^2} X_\infty Y_\infty\right)^{-1} Y_\infty$$

aus obiger Gleichung die algebraische Riccati-Gleichung in der Form von Bedingung (ii) des Satzes (längliche Rechnung).

Da die Matrix $X_\infty Y_\infty$ symmetrisch und positiv semidefinit ist, also nicht-negative Eigenwerte hat, gibt es die in der Transformation auftretende Inverse genau dann, wenn für den Spektralradius gilt

$$\rho(X_\infty Y_\infty) < \gamma^2\,.$$

Mit der Notation $L = -YC_2^\top = -Z_\infty Y_\infty C_2^\top = Z_\infty L_\infty$ wie im obigen Satz erhalten wir letztendlich den $\mathcal{H}_\infty$-Ausgangsregler in der Form

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= \left(A + \tfrac{1}{\gamma^2} B_1 B_1^\top X_\infty\right)\hat{x} + B_2 u + Z_\infty L_\infty (C_2\hat{x} - y) \\ u &= -F_\infty \hat{x}\,, \end{aligned} \tag{17}$$

was offensichtlich der Realisierung des „Central Controller“ gemäß des Satzes entspricht.