Beiblatt 2: Beobachtbarkeitskriterien

Der folgende Satz enthält eine Zusammenstellung von Beobachtbarkeitskriterien für MIMO-LTI-Systeme

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0 \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned}$$

mit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$ und $D \in \mathbb{R}^{p\times p}$.

Satz (Beobachtbarkeitskriterien für zeitkontinuierliche MIMO-LTI-Systeme)**.**
Die folgenden Aussagen sind einander äquivalent:

1. *Das Paar* (C, A) *ist beobachtbar.*

2. *Die Matrix (Beobachtbarkeits Gramsche)*

   $$M(t) := \int_0^t e^{A^\top \tau} C^\top C \, e^{A\tau} d\tau$$

   ist für beliebige $t > 0$ *positiv definit.*

3. *Die Beobachtbarkeitsmatrix (nach Kalman)*

   $$O = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$$

   hat (vollen) Rang n, d.h. es gilt: $\mathrm{Ker}(O) = 0$.

4. *Die Matrix* $\begin{pmatrix} A - \lambda I \\ C \end{pmatrix}$ *hat (vollen) Rang n für alle* $\lambda \in \mathbb{C}$.

5. *Sei* λ *ein beliebiger Eigenwert von* A*. Jeder Rechtseigenvektor* w *von* A *zum Eigenwert* λ*, d.h.* $A\,w = \lambda\,w$*, erfüllt* $Cw \neq 0$.

6. *Es gibt eine Matrix* $L \in \mathbb{R}^{n\times p}$ *so, daß die Eigenwerte der Matrix* $A + LC$ *mittels* L *beliebig festgelegt werden können (mit der Einschränkung, daß komplexe Eigenwerte konjugiert komplex auftreten).*

7. *Das Paar* $(A^\top, C^\top)$ *ist steuerbar.*

$\square$

Bemerkungen:

zu 3. Die Zeilen von O spannen den beobachtbaren Unterrraum des $\mathbb{R}^n$ auf, d.h. im beobachtbaren Fall gilt: $\mathrm{Im}(O^\top) = \mathbb{R}^n$ und damit $\mathrm{Ker}(O) = 0$.

zu 6. Die Matrix $A + LC$ ist die Dynamikmatrix des Beobachterfehlersystems.