Beiblatt 9: Existenz stabilisierender Lösungen der algebraischen Riccati-Gleichung

Unter den in der Vorlesung getroffenen Annahmen zeigen wir:

$$H \in \mathrm{dom}(\mathrm{Ric}) \quad \Longleftrightarrow \quad (A, R) \text{ stabilisierbar}$$

Beweis:

($\Rightarrow$) Aus dem Satz über die Existenz stabilisierender reeller Lösungen X folgt sofort

$$H \in \mathrm{dom}(\mathrm{Ric}) \quad \Longrightarrow \quad (A + R\,X) \text{ stabil} \quad \Longrightarrow \quad (A, R) \text{ stabilisierbar}$$

($\Leftarrow$) Sei $\mathcal{X}_-(H) = \mathrm{Im}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$. Wir müssen zeigen, daß die Stabilisierbarkeit des Paars (A, R) die Invertierbarkeit von X_1 impliziert bzw. dem äquivalent: $X_1 x = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0$.

Zur einfacheren Referenzierung wiederholen wir Gleichung (1) des vorangehenden Beiblatts:

$$\begin{pmatrix} A & R \\ -Q & -A^\top \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}\Lambda\,. \tag{1}$$

Mit der ersten Zeile

$$AX_1 + RX_2 = X_1\Lambda \tag{2}$$

$$\Longrightarrow \quad x^\star X_2^\star\,(AX_1 + RX_2)\,x = x^\star X_2^\star X_1 \Lambda x$$

und mit $X_2^\star X_1 = X_1^\star X_2$ aus dem vorangehenden Beiblatt gilt

$$x^\star X_2^\star\,(AX_1 + RX_2)\,x = x^\star X_1^\star X_2 \Lambda x\,. \tag{3}$$

Zur Konstruktion eines Widerspruchs nehmen wir nun an, daß $X_1 x = 0$ bzw. $x^\star X_1^\star = 0$ für ein $x \neq 0$. Damit folgt aus (3) sofort

$$x^\star X_2^\star R X_2 x = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (X_2 x)^\star\,R\,(X_2 x) = 0$$

und mit R positiv semidefinit schließen wir

$$RX_2 x = 0\,. \tag{4}$$

Rechtsmultiplikation von Gleichung (2) mit x ergibt

$$(AX_1 + RX_2)x = X_1 \Lambda x$$

und wird mit $X_1 x = 0$ und $RX_2 x = 0$ zu

$$X_1 \Lambda x = 0 \quad \Longrightarrow \quad \Lambda x \in \mathrm{Ker}(X_1) \tag{5}$$

Aus der zweiten Zeile von Gleichung (1) erhalten wir

$$(-QX_1 - A^\top X_2)x = X_2 \Lambda x \quad \overset{X_1 x = 0}{\Longrightarrow} \quad -A^\top X_2 x = X_2 \Lambda x\,. \tag{6}$$

Wählen wir nun x als Eigenvektor von Λ (alle Eigenwerte in $\mathbb{C}^-$) und erfüllen damit Gleichung (5), dann folgt mit $\Lambda x = \lambda x$ aus (6) nun

$$-A^\top X_2 x = X_2 \lambda x \quad \Longrightarrow \quad (A^\top + \lambda I)X_2 x = 0\,. \tag{7}$$

Faßt man die Gleichungen (4) und (7) in

$$x^\top X_2^\top\,(A + \lambda I,\ R) = 0 \tag{8}$$

zusammen so folgert man aus der Stabilisierbarkeit von (A, R), daß

$$x^\top X_2^\top = 0 \quad \Longrightarrow \quad X_2 x = 0\,. \tag{9}$$

Demnach folgt $\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} x = 0$. Da $\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$ per Konstruktion Rang n hat, folgt $x = 0$ (Widerspruch). Also ist X_1 invertierbar.