# Regelungs- und Systemtechnik 3 — Übung 3

Sommer 2016

**Aufgabe 1**

Gegeben sei das folgende lineare SISO-System:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx, \end{aligned}$$

wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, daß das System weder steuerbar noch beobachtbar, aber sowohl stabilisierbar als auch detektierbar ist.

b) Entwerfen Sie nun eine Zustandsrückführung und einen vollständigen Beobachter so, daß alle Eigenwerte im geschlossenen Kreis bei $-1, -2$ zu liegen kommen.

**Aufgabe 2**

Die Übertragungsmatrix

$$G(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{(s+1)(s+2)} & -\frac{1}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{s^2+s-4}{(s+1)(s+2)} & \frac{2s^2-s-8}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{s-2}{s+1} & \frac{2(s-2)}{s+1} \end{pmatrix}$$

soll untersucht werden.

a) Zerlegen Sie $G(s)$ in $G(s) = \frac{1}{d(s)} P(s)$, so daß $P(s)$ eine Polynommatrix ist.

b) Berechnen Sie die Smith-Form von $P(s)$.

c) Berechnen Sie die Smith-McMillan-Form von $G(s)$. Geben sie die Lage und die Vielfachheit der Pole und Nullstellen von $G(s)$ an. Was ist der McMillan-Grad von $G(s)$ und was sagt er aus?

Betrachten Sie nun die Übertragungsmatrix

$$G(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+2} \\ \frac{1}{s+2} & \frac{1}{s+1} \end{pmatrix}$$

d) Berechnen Sie auch hierfür die Smith-McMillan Form.

e) Geben Sie den normalen Rang von $G(s)$ an.

f) Welchen Rang hat $G(-\frac{3}{2})$? Welchen Effekt auf das Übertragungsverhalten darf man erwarten?

**Aufgabe 3**

Sie haben folgende Übertragungsmatrix gegeben:

$$G(s) = \begin{pmatrix} G_1(s) & G_2(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{s+1}{(s+2)^2} & \frac{1}{s+1} \\ \frac{1}{s+1} & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die Übertragungsnullstellen und -polstellen sowie den McMillan-Grad.

b) Es soll eine Realisierung für die Übertragungsmatrix $G(s)$ gefunden werden. Es zeigt sich, daß im kleinsten gemeinsamen Vielfachen aller Nennerpolynome der Pol $s = -2$ doppelt ist, so daß man mit dem vereinfachten Verfahren nach Gilbert keine Realisierung finden kann.

Eine Variante, um eine (allerdings i.a. nicht minimale) Realisierung zu erhalten ist wie folgt: Man führt für die Spalten $G_i(s), i = 1, \dots, l$ eine Zerlegung

$$G_i(s) = \frac{n_i(s)}{d_i(s)} + \delta_i, \quad i = 1, \dots, l$$

durch, wobei $d_i(s)$ das kleinste gemeinsame monische Nennerpolynom der $i$-ten Spalte von $G(s)$ bezeichnet, d.h.

$$d_i(s) = s^{k_i} + d_i^{k_i-1} s^{k_i-1} + \dots + d_i^0, \quad i = 1, \dots, l.$$

Der Vektor der Zähler von $G(s)$, $n_i(s), i = 1, \dots, l$, enthält Polynome vom Grad kleiner als $k_i$ und $\delta_i$ ist ein konstanter Vektor. Das $j$-te Element von $n_i(s)$ lässt sich als

$$\nu_{ji}(s) = \nu_{ji}^{k_i-1} s^{k_i-1} + \nu_{ji}^{k_i-2} s^{k_i-2} + \dots + \nu_{ji}^0$$

schreiben. Somit ist die Realisierung $(A_i, B_i, C_i, \delta_i)$ von $G_i(s)$

$$A_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -d_i^0 & -d_i^1 & -d_i^2 & -d_i^3 & \dots & -d_i^{k_i-1} \end{pmatrix},$$

$$B_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; C_i = \begin{pmatrix} \nu_{1i}^0 & \nu_{1i}^1 & \dots & \nu_{1i}^{k_i-1} \\ \nu_{2i}^0 & \nu_{2i}^1 & \dots & \nu_{2i}^{k_i-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \nu_{mi}^0 & \nu_{mi}^1 & \dots & \nu_{mi}^{k_i-1} \end{pmatrix}.$$

Die Realisierung $(A, B, C, D)$ von $G(s)$ ist dann durch

$$\begin{aligned} A &= \mathrm{diag}(A_1, A_2, \dots, A_l), \quad B = \mathrm{diag}(B_1, B_2, \dots, B_l) \\ C &= (C_1, C_2, \dots, C_l), \quad D = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_l) \end{aligned}$$

gegeben. Diese Realisierung ist zwar stets steuerbar, aber evtl. nicht beobachtbar. In diesem Fall müßte man das System noch in beobachtbare und nicht-beobachtbare Anteile zerlegen.

Verwenden Sie dieses Verfahren, um eine minimale Realisierung von $G(s)$ zu berechnen.