Regelungs- und Systemtechnik 3 — Übung 5

Sommer 2016

Aufgabe 1

Die Übertragungsfunktion erster Ordnung

$$G(s) = \frac{1}{s+a}, \quad 0 < a \in \mathbb{R}$$

soll untersucht werden.

a) Berechnen Sie die $\mathcal{H}_\infty$-Norm der Übertragungsfunktion $G(s)$ und $\|g\|_1$, d.h. die $\mathcal{L}_1$-Norm der zugehörigen Impulsantwort.

b) Bestimmen Sie $\|G\|_2$ anhand von $\|G\|_2^2 = \mathrm{Spur}(B^\mathrm{T} L_\mathrm{O} B) = \mathrm{Spur}(C L_\mathrm{C} C^\mathrm{T})$, wobei L_O und L_C die Beobachtbarkeits-Gramsche bzw. Steuerbarkeits-Gramsche bezeichnet.

c) Berechnen Sie $\|G\|_\infty$ über die Hamiltonsche Matrix H.

Aufgabe 2

Gegeben sind folgende (matrixwertige) Funktionen:

$$F_1 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^{2\times 2}, s \mapsto F_1(s) = \begin{pmatrix} \frac{s}{s+1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+2} \end{pmatrix} \qquad F_4 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^{2\times 2}, s \mapsto F_4(s) = \begin{pmatrix} \frac{5}{(s+1)(s+2)} & \frac{2s+1}{s^2+2s+3} \\ \frac{8}{s+1} & \frac{9s}{s^2+3s+2} \end{pmatrix}$$

$$F_2 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, s \mapsto F_2(s) = \left[\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 \end{array}\right] \qquad F_5 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^{2\times 2}, s \mapsto F_5(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{s-4} & \frac{1}{s^2+2s+4} \\ 0 & \frac{s+2}{(s-4)(s+3)} \end{pmatrix}$$

$$F_3 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, s \mapsto F_3(s) = \frac{1}{1+e^3 e^{-3s}} \qquad F_6 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^{2\times 2}, s \mapsto F_6(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{s^2+3s+1}} & 0 \\ 0 & \frac{s+2}{\sqrt{s^2+6s+2}} \end{pmatrix}$$

Ordnen Sie F_1 bis F_6 soweit möglich den Räumen $\mathcal{H}_\infty$, $\mathcal{RH}_\infty$ bzw. $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{RH}_2$ zu.

Aufgabe 3

Ermitteln Sie mit Hilfe des nachfolgend vorgestellten Bisektionsalgorithmus eine Approximation für $\|G\|_\infty$ bzgl. $G(s) = \frac{1}{s+2}$. Verwenden Sie als Abbruchkriterium $\epsilon = \frac{1}{4}$ und $\gamma_u = 0, \gamma_0 = 1$.

Bisketionsalgorithmus:

1. Wähle $\gamma_u \le \|G\|_\infty \le \gamma_o$ sowie Toleranz ϵ
2. **if** $\dfrac{\gamma_o - \gamma_u}{\gamma_o} \le \epsilon$: Setze $\|G\|_\infty := \dfrac{\gamma_o + \gamma_u}{2}$; **return**;
   else $\gamma := \dfrac{\gamma_o + \gamma_u}{2}$
3. Überprüfe $\|G\|_\infty < \gamma$:
   if H hat keine Eigenwerte auf $j\mathbb{R}$: setze $\gamma_o := \gamma$
   else setze $\gamma_u := \gamma$
4. **go to** 2.